ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-CINQUIÈME — ANNÉE 1948

(84e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1948

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-CINQUIÈME — ANNÉE 1948

(84e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1948

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

Reprinted by permission of the original publishers

KRAUS REPRINT
A Division of
KRAUS-THOMSON ORGANIZATION LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1971

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL.

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : Mlle P. GAUTHIER-VILLARS.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-CINQUIÈME.

Pages.

L'indicatrice de croissance d'une fonction sous-harmonique de n variables, par M. *Georges Bourion* 1

Sur les fonctions entières périodiques, par M. *Pham Tinh-Quat* 11

Sur certains systèmes triples orthogonaux paratingents, par M. *J. Colmez* 71

Théorèmes d'unicité, par M. *S. Mandelbrojt* 101

La classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre quatre, par MM. *F. Jongmans* et *L. Nollet* 139

Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique, par M. *Lucien Godeaux* 189

Positions typiques d'un élément aléatoire de nature quelconque, par M. *Maurice Fréchet* 511

La structure des p-groupes de Sylow des groupes symétriques finis, par M. *Léo Kaloujnine* 239

Sur quelques équations fonctionnelles, par M. *Nicolas Pastidès* 277

Sur l'existence et la stabilité des solutions périodiques de certains systèmes différentiels, par M. *Jules Haag* 299

Sur quelques équations aux différences mêlées, par M. *Paul Montel* 337

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55
129966-49

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

L'INDICATRICE DE CROISSANCE D'UNE FONCTION SOUS-HARMONIQUE DE n VARIABLES

PAR M. GEORGES BOURION.

Dans une étude antérieure (1), j'ai essayé d'analyser la théorie classique de l'indicatrice de croissance (2) en y séparant les éléments géométriques de ceux qui ressortissent à la théorie des fonctions. Je me propose ici de reprendre cette analyse, sous une forme aussi élémentaire que possible, dans un espace euclidien quelconque (3).

I. — Recouvrements de l'espace par des demi-espaces ouverts.

1. Remarquons tout d'abord que si une droite D est recouverte par une famille *finie* (F) de demi-droites ouvertes Q, D peut être recouverte par *deux* demi-droites de (F). Nous pouvons toujours nous ramener au cas où (F) est *minimale*; nous entendons par là que la suppression d'un élément quelconque

(1) G. BOURION, *Sur l'indicatrice de croissance d'une fonction sous-harmonique dans un angle* (*Bull. des Sc. Math.*, 2e série, t. LXXI, 1947, p. 171). — *Erratum* : au paragraphe II. n° 5, supprimer : $\alpha < \varphi < \beta$; (on peut prendre pour φ une détermination quelconque de l'angle polaire de F).

(2) G. PÓLYA, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* [*Math. Zeitschr.* 29, 1929, p. 549-640 (*voir* p. 581 à 597)].

(3) Le présent travail est indépendant du précédent, sauf pour une démonstration particulière (II.3).

de (F) donne une famille qui ne couvre plus D. Soit alors $Q_0 \in (F)$; l'extrémité D_0 de Q_0, n'appartenant pas à Q_0, appartient à une autre demi-droite Q_1 de (F); si Q_1 avait même direction que Q_0, on aurait $Q_0 \sqsubset Q_1$ et Q_0 serait inutile, contrairement à l'hypothèse; Q_1 a donc la direction opposée à celle de Q_0, et la réunion de Q_0 et Q_1 couvre D.

Ce résultat s'étend à un espace de dimension quelconque sous la forme suivante : *Si l'espace* E^m, *de dimension m, est couvert par une famille finie* (F) *de demi-espaces ouverts* Q (1), E^m *peut être couvert par une famille extraite de* (F) *et comprenant* $m+1$ *au plus des demi-espaces* Q.

Nous pouvons supposer le lemme établi pour les espaces de dimension inférieure à m. Nous pouvons d'autre part supposer la famille (F) minimale : la suppression d'un élément quelconque donne alors une famille qui ne couvre plus E^m. Soit $Q_0 \in (F)$. Il se peut tout d'abord que le bord D_0 de Q_0 soit entièrement recouvert par un même demi-espace Q_1 de (F); le bord D_1 de Q_1 est alors parallèle à D_0; les normales à D_0 et D_1, orientées respectivement vers l'intérieur de Q_0 et de Q_1, sont de directions opposées (sans quoi $Q_0 \sqsubset Q_1$, et Q_0 serait inutile); la réunion de Q_0 et Q_1 couvre donc E^m.

Écartons ce cas particulier : D_0 est alors un espace de dimension $m-1$, couvert par la famille finie (F') des demi-espaces ouverts $(m-1)$ — dimensionnels $Q.D_0$ correspondants à ceux des demi-espaces Q de (F) dont le bord D n'est pas parallèle à D_0 (2). Par l'hypothèse de récurrence, on peut extraire de (F') une famille de m éléments au plus couvrant D_0 : soit

$$D_0 \sqsubset Q_1.D_0 + Q_2.D_0 + \ldots + Q_k.D_0, \qquad k \leq m;$$

la réunion des demi-espaces ouverts $Q_1, \ldots, Q_k$ couvre D_0 et par suite l'un au moins des deux demi-espaces séparés par D_0 (3); ce ne peut être Q_0, (F) étant supposée minimale; c'est donc le demi-espace complémentaire, et les demi-espaces $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$, dont le nombre $k+1$ ne surpasse pas $m+1$, couvrent E^m.

2. Considérons maintenant une famille infinie (F) de demi-espaces ouverts Q telle que tout point de E^m appartienne à un élément au moins de (F); supposons que l'on puisse extraire de (F) une famille finie (f) couvrant E^m sauf peut-être un ensemble borné B; B borné étant de plus nécessairement fermé peut, d'après le lemme de Borel-Lebesgue, être couvert par une famille finie (f')

(1) Nous emploierons le mot « espace » au sens d'espace euclidien; un demi-espace ouvert Q de E^m est l'une des composantes du complémentaire d'un $(m-1)$-plan D (le *bord* de Q), ou encore l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une même inégalité linéaire avec exclusion de l'égalité.

(2) A.B désigne l'ensemble des points communs aux ensembles A et B.

(3) L'ensemble complémentaire de $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k$, c'est-à-dire la partie commune des demi-espaces fermés complémentaires de $Q_1, \ldots, Q_k$, est convexe; il ne peut donc avoir de points à la fois dans les deux demi-espaces de bord D_0, puisqu'il n'a pas de points dans D_0.

extraite de (F). E^m couvert par une famille finie $(f)+(f')$ extraite de (F) peut, d'après le lemme précédent, être couvert par une famille d'au plus $m+1$ demi-espaces Q pris dans (F).

Ce raisonnement est applicable, en particulier, si à toute direction (1) dans E^m correspond au moins un demi-espace $Q \in (F)$ tel que la normale au bord de Q, orientée vers l'intérieur de Q, ait la direction donnée; en effet, si les m droites $Ox_1, \ldots, Ox_m$ sont deux à deux perpendiculaires et si Q'_i et Q''_i sont deux demi-espaces de (F) tels que les normales intérieures correspondantes soient respectivement parallèles aux deux directions de Ox_i, on peut former la famille (f) avec $Q'_1, Q''_1, \ldots, Q'_m, Q''_m$.

En nous plaçant dans l'hypothèse précédente, considérons une famille finie (Φ) extraite de (F), couvrant E^m, et supposons cette famille minimale. Désignons par $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$ les demi-espaces de (Φ), par d_i la normale au bord de Q_i orientée vers l'intérieur de Q_i. Une direction d de E^m ne peut être à angle obtus avec tous les d_i : un point suffisamment éloigné dans une telle direction serait en effet extérieur à tous les Q_i. Supposons maintenant qu'une direction d ne fasse d'angle aigu avec aucune des directions $d_0, \ldots, d_k$; nous partagerons ces dernières en deux classes, (I) comprenant les directions normales à d et (II) les directions qui forment un angle obtus avec d. Par un point A pris arbitrairement dans E^m, menons une demi-droite Az de direction d; un point suffisamment éloigné sur Az ne peut appartenir à aucun demi-espace de classe (II) et appartient par suite à un Q_i de classe (I); ce dernier contient également A, puisque Az est parallèle au bord de Q_i. A étant un point arbitraire de E^m, nous voyons que les Q_i de classe (I) suffisent à recouvrir E^m; la classe (II) est donc vide, d'après la propriété minimale postulée pour (Φ). En d'autres termes, une direction de E^m qui ne fait d'angle aigu avec aucune des directions $d_0, d_1, \ldots, d_k$ est normale à toutes ces directions.

Soient alors $D_0, D_1, \ldots, D_k$ les demi-droites menées par un même point Ω parallèlement à $d_0, d_1, \ldots, d_k$, et M^q la multiplicité linéaire déterminée par ces demi-droites (2). L'enveloppe convexe H de $D_0, D_1, \ldots, D_k$ (3) est certainement contenue dans M^q; si H ne remplit pas M^q, Ω est un point frontière de H; soit, dans l'espace q-dimensionnel M^q, P un $(q-1)$-plan d'appui de H en Ω, et d la direction de la normale menée dans M^q à P et orientée du côté opposé à H; d ne faisant d'angle aigu avec aucune des directions $d_0, \ldots, d_k$, serait d'après ce qui précède normale à toutes ces directions, et $D_0, \ldots, D_k$ appartiendraient toutes au $(q-1)$-plan P, en contradiction avec la définition de M^q. Ainsi l'enveloppe convexe de $D_0, \ldots, D_k$ n'est autre que la multiplicité linéaire M^q déterminée par ces demi-droites.

---

(1) Le mot « direction » est employé ici et dans la suite au sens de « direction de droites orientées ».

(2) Multiplicité linéaire de plus petite dimension contenant $D_0, D_1, \ldots, D_k$.

(3) Plus petit ensemble convexe contenant $D_0, D_1, \ldots, D_k$.

Il résulte de là que la dimension q de M^q, qui *a priori* ne peut surpasser $k+1$, est au plus égale à k. Si l'on avait $q < k$, on pourrait recouvrir M^q avec une famille (Φ') extraite de (Φ) comportant au plus $q+1$ éléments, d'après le n° 1; (Φ') recouvrirait E^n, parce que la multiplicité qui projette orthogonalement sur M^q un point arbitraire de E^n est parallèle au bord de chacun des Q_i et de dimension moindre; il y aurait contradiction avec la propriété minimale de (Φ).

La dimension de M^q est ainsi égale à k.

II. — Lemme sur les ensembles convexes.

1. Considérons dans l'espace n-dimensionnel E^n un ensemble $\mathfrak{A}$ de directions d; chaque direction sera matérialisée par la demi-droite parallèle issue de l'origine O, et l'on pourra sans inconvénient employer la même notation pour une direction et pour la demi-droite correspondante.

Nous supposerons que $\mathfrak{A}$ satisfait aux deux conditions suivantes :

si $d \in \mathfrak{A}$, on peut indiquer un angle α_d tel que toute direction qui fait avec d un angle inférieur à α_d appartient aussi à $\mathfrak{A}$;

si les directions non opposées d_1 et d_2 appartiennent à $\mathfrak{A}$, toute direction comprise entre d_1 et d_2 (1) appartient aussi à $\mathfrak{A}$.

Alors, si $\mathfrak{A}$ contient deux directions opposées, $\mathfrak{A}$ renferme toutes les directions de E^n. Sinon, les points des demi-droites (ouvertes) associées aux directions de $\mathfrak{A}$ forment un ensemble ouvert convexe $\mathfrak{A}$ dont l'origine est un point frontière (2).

A chaque direction $d \in \mathfrak{A}$, nous supposerons associé un $(n-1)$-plan Π_d normal à d; Q_d sera le demi-espace ouvert limité par Π_d et tel que la normale à Π_d orientée vers l'intérieur de Q_d ait pour direction d; P_d sera le demi-espace fermé complémentaire de Q_d.

Nous allons établir le lemme suivant :

Lemme géométrique. — *Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble convexe fermé constitué par les points communs à tous les demi-espaces fermés P_d correspondant aux différentes directions d de $\mathfrak{A}$. Pour que $\mathcal{C}$ admette les Π_d comme $(n-1)$-plans d'appui* (3), *il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

Condition (C). — *Quels que soient : d'une part, le système de directions linéai-*

---

(1) C'est-à-dire telle que la demi-droite correspondante appartienne à l'angle d'ouverture inférieure à deux droits limité par d_1 et d_2.

(2) Il existe alors au moins un $(n-1)$-plan qui laisse d'un même côté toutes les demi-droites d : le ou les $(n-1)$-plans d'appui de $\mathfrak{A}$ en O possèdent en effet cette propriété.

(3) On entend par là : $\mathcal{C}$ est contenu dans l'un des deux demi-espaces fermés de bord Π_d; Π_d renferme au moins un point frontière de $\mathcal{C}$.

rement indépendantes (1) $d_1, d_2, \ldots, d_p$ *appartenant à* $\mathfrak{A}$*; et, d'autre part, la demi-droite* d *contenue dans l'angle polyèdre qui a pour arêtes les demi-droites* $d_1, d_2, \ldots, d_p$ (2) :

Π_d *n'est pas entièrement recouvert par* $Q_{d_1}, Q_{d_2}, \ldots, Q_{d_p}$.

La condition (C) peut d'ailleurs être remplacée par l'une ou l'autre des conditions équivalentes que voici :

Pour les mêmes choix des d_i *et de* d *:*

Condition (C'). — *Les demi-espaces fermés* $P_{d_1}, P_{d_2}, \ldots, P_{d_p}$ *recouvrent complètement* Π_d.

Condition (C''). — *L'intersection* (certainement non vide) *de* $\Pi_{d_1}, \Pi_{d_2}, \ldots, \Pi_{d_p}$ *est dans* Q_d *ou sur* Π_d.

L'intersection S des Π_{d_i} est un point si $p = n$, un $(n-p)$-plan normal aux d_i et par suite également à d, si $p < n$. Soit Q' le demi-espace déduit de Q_d par une translation qui amène son bord Π' à passer par S. La réunion des Q_{d_i} recouvre Q' d'après l'hypothèse faite sur les d_i et sur d, mais ne couvre pas S et par suite ne couvre pas Π'. Pour que Π_d soit recouvert, il faut et il suffit qu'il soit intérieur à Q', c'est-à-dire que S soit intérieur au complémentaire de Q_d. Ceci établit l'équivalence des conditions (C) et (C'').

Soit A un point de S. Si M est un point de l'intersection K (non vide) des Q_{d_i}, la demi-droite (ouverte) d'origine A passant par M est contenue dans K. D'autre part, si $\vec{u_i}$ et $\vec{u}$ sont des vecteurs de directions respectives d_i et d, $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des $\vec{u_i}$ avec des coefficients positifs; les points M de K étant caractérisés par $\overrightarrow{AM}.\vec{u_i} > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$, et ceux de Q' par $\overrightarrow{AM}.\vec{u} > 0$, on voit que $K \sqsubset Q'$. Pour que Π_d soit complètement recouvert par les P_{d_i}, c'est-à-dire pour qu'il ne rencontre pas K, il faut et il suffit que Π_d ne soit pas intérieur à Q'. Les conditions (C') et (C'') sont donc bien équivalentes.

2. La nécessité de la condition (C) est immédiate. Si en effet un choix particulier du système $d_1, d_2, \ldots, d_p$ et de d met en défaut cette condition, tout point de Π_d est contenu dans l'un au moins des Q_{d_i}, et par suite étranger à l'un au moins des P_{d_i}, donc étranger à $\mathcal{C}$; Π_d, qui ne contient aucun point de l'ensemble fermé $\mathcal{C}$, ne peut en être un $(n-1)$-plan d'appui.

3. Supposons maintenant vérifiée la condition (C); envisageons d'abord le cas où $\mathfrak{A}$ renferme deux directions opposées d' et d'', et montrons que les demi-

(1) On suppose donc que les p demi-droites $d_1, \ldots, d_p$ déterminent une multiplicité linéaire de dimension p.

(2) d appartient à $\mathfrak{A}$ d'après la seconde condition imposée à cet ensemble.

espaces $Q_{d'}$ et $Q_{d''}$ sont sans points communs; pour cela, considérons les directions d appartenant à un même 2-plan K passant par d' et d'', et pour chacune de ces directions la trace Q_d^* de Q_d sur K. Les conclusions de mon travail cité ci-dessus (*voir* en particulier le paragraphe I, n^{os} 4 et 5) s'appliquent et montrent que $Q_{d'}^*$ et $Q_{d''}^*$, donc aussi $Q_{d'}$ et $Q_{d''}$, sont sans points communs.

4. Supposons toujours la condition (C) vérifiée, et supposons de plus que le $(n-1)$-plan Π_δ correspondant à une direction particulière δ, $\delta \in \mathfrak{A}$, ne soit pas un $(n-1)$-plan d'appui de $\mathcal{C}$. Chaque point de Π_δ appartient alors à un demi-espace Q_d, $d \in \mathfrak{A}$, qui d'ailleurs ne peut être ni Q_δ, ni $Q_{\delta'}$ si la direction δ' opposée à δ appartient à $\mathfrak{A}$: Q_δ est en effet sans point commun avec Π_δ par sa définition même, et $Q_{\delta'}$ d'après le numéro précédent.

L'espace $(n-1)$-dimensionnel Π_δ est donc couvert par la famille (F) des demi-espaces $(n-1)$-dimensionnels Q_d^* découpés sur lui par les Q_d, $d \in \mathfrak{A}$, $d \neq \delta$, $d \neq \delta'$: $Q_d^* = \Pi_\delta . Q_d$. Nous pouvons appliquer à cette famille (F) les considérations du paragraphe I, n° 2 : Π_δ peut donc être recouvert par une famille finie (Φ) extraite de (F) et comprenant au plus n éléments; nous supposerons (Φ) minimale et nous désignerons ses éléments par $Q_{d_i}^* = \Pi_\delta . Q_{d_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $k \leq n$. Soit D_i la demi-droite obtenue en projetant sur Π_δ la demi-droite d_i, M^{k-1} la multiplicité linéaire déterminée par $D_1, D_2, \ldots, D_k$; rappelons que l'enveloppe convexe de $D_1, D_2, \ldots, D_k$ est identique à M^{k-1}. Si nous prenons d_i' entre δ et d_i, la projection de d_i' sur Π_δ est encore D_i; d'autre part $\Pi_\delta . Q_{d_i} \supset \Pi_\delta . Q_{d_i}$ (1) ou $Q_{d_i}^* \supset Q_{d_i}^*$; le système des $Q_{d_i}^*$, $i = 1, 2, \ldots, k$ recouvre aussi Π_δ. Nous pouvons donc supposer que les demi-droites d_i forment avec δ des angles aigus. Le point A_i où la droite qui porte d_i perce Π_δ appartient alors à la demi-droite D_i, si Π_δ coupe la demi-droite δ elle-même, à son prolongement si Π_δ coupe δ'; dans l'un ou l'autre cas, la projection Ω de l'origine sur Π_δ est intérieure à l'enveloppe convexe des A_i et il en résulte que δ est intérieure à l'angle polyèdre qui a les d_i pour arêtes; cette conclusion est encore valable si Π_δ passe par O.

L'hypothèse que Π_δ n'est pas un $(n-1)$-plan d'appui de $\mathcal{C}$ nous met ainsi en contradiction avec la condition (C), ce qui achève la démonstration du lemme.

5. *Remarque.* — Dans l'énoncé du lemme, la condition (C) peut être remplacée par la condition suivante, moins restrictive en apparence :

Condition (C'). — *Quels que soient, d'une part, le système de n directions linéairement indépendantes $d_1, d_2, \ldots, d_n$ prises dans $\mathfrak{A}$, et d'autre part la demi-droite d intérieure à l'angle polyèdre qui a pour arêtes les demi-droites $d_1, d_2, \ldots, d_n$:*

Π_d n'est pas entièrement recouvert par $Q_{d_1}, Q_{d_2}, \ldots, Q_{d_n}$.

(1) Conséquence immédiate de la condition (C) appliquée à δ, d_i et à d_i'. *Voir* travail cité I, 4.

La démonstration du lemme avec la condition (Γ) est plus longue, et ce nouvel énoncé ne présente pas d'avantage pour les applications analytiques que nous avons en vue (¹).

III. — Lemmes sur les fonctions sous-harmoniques.

1. Nous aurons besoin de quelques lemmes se rattachant à des propriétés simples de l'équation des fonctions de Legendre.

Considérons une fonction des n variables $x_1, \ldots, x_n$ de la forme particulière

$$F(M) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r^\lambda \varphi(u), \tag{1}$$

où l'on pose

$$r = OM, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \qquad u = \cos\theta = \frac{x_n}{r}, \qquad \theta = (Ox_n, OM).$$

Le calcul du laplacien

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

donne

$$\frac{1}{r^{\lambda-2}} \Delta[r^\lambda \varphi(u)] = (1-u^2)\varphi''(u) - (n-1)u\varphi'(u) + \lambda(\lambda+n-2)\varphi(u). \tag{2}$$

L'équation différentielle

$$(1-u^2)\varphi''(u) - (n-1)u\varphi'(u) + \lambda(\lambda+n-2)\varphi(u) = 0, \tag{3}$$

devient, par le changement de variables $u = 1 - v$, $\varphi(u) = \psi(v)$,

$$(2v - v^2)\psi''(v) + (n-1)(1-v)\psi'(v) + \lambda(\lambda+n-2)\psi(v) = 0. \tag{4}$$

La série $\sum_0^\infty a_k v^k$ vérifie formellement l'équation (4) si les coefficients consécutifs sont liés par la relation

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k(k+n-2) - \lambda(\lambda+n-2)}{(2k+n-1)(k+1)}, \tag{5}$$

qui détermine complètement les a_k si l'on prend $a_0 = 1$. Comme $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2}$, cette série converge uniformément sur tout segment $|v| \leq v_0$ avec $v_0 < 2$, donc en particulier sur le segment $0 \leq v \leq 1$, et sa somme $\Psi(v; \lambda)$ y vérifie l'équation (4).

Limitons la variation de λ à un segment $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ avec $\lambda_0 > 0$; la condition (5) jointe à $a_0 = 1$ montre qu'un a_k de rang donné est borné supé-

(¹) Il est clair que la condition (C) contient la condition (Γ). D'autre part, si la condition (Γ) est vérifiée, on peut montrer que la distance de l'origine à Π_d est une fonction continue de la direction d; on déduit facilement de là que la condition (Γ) implique la condition (C).

rieurement en module pour ces λ. Nous appliquerons ce résultat aux coefficients dont le rang ne surpasse pas λ_1 et nous utiliserons pour les autres l'inégalité

$$(6) \qquad 0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{1}{2}\,\frac{k(k+n-2)}{(k+1)\left(k+\frac{n-1}{2}\right)} \qquad (k>\lambda).$$

Pour les valeurs considérées de λ et pour $|\rho| \leq \rho_0$, $\rho_0 < 2$, la série $\sum a_k \rho^k$ est donc majorée par une série convergente de constantes. $\Psi(\rho;\lambda)$ est par suite une fonction continue de l'ensemble des deux variables pour $\lambda \geq 0$, $|\rho| < 2$.

Posons alors

$$\Psi(\rho;\lambda) = \Phi(u;\lambda);$$

nous obtenons une solution $\Phi(u;\lambda)$ de l'équation différentielle (3), dépendant du paramètre λ, qui est définie en particulier pour $0 \leq u \leq 1$, $\lambda \geq 0$ et qui est alors une fonction continue de l'ensemble des variables u et λ; cette solution prend pour $u=1$ la valeur 1 (1).

Notons que, pour $\lambda = 1$, a_2 s'annule d'après (5) ainsi que les coefficients suivants; $\Psi(\rho;1)$ se réduit à $1-\rho$, et l'on a

$$\Phi(u;1) = u \quad (2).$$

2. $\Phi(u;1)$ étant positif pour $0 < u \leq 1$, la continuité de Φ montre que, sur un segment donné $u_0 \leq u \leq 1$ avec $u_0 > 0$, $\Phi(u;\lambda)$ a une borne inférieure positive pour toute valeur de λ suffisamment voisine de 1.

D'autre part, d'après (2) et la définition de $\Phi(u;\lambda)$,

$$\frac{1}{r^{\mu-2}}\Delta[r^{\mu}\Phi(u;\lambda)] = [\mu(\mu+n-2) - \lambda(\lambda+n-2)]\Phi(u;\lambda);$$

si $0 < \mu < \lambda$ et si $\Phi(u;\lambda) > 0$, cette expression est négative.

Étant donnée une valeur u_0 : $0 < u_0 < 1$, nous pourrons choisir une valeur $\lambda_0 > 1$ telle que $\Phi(u;\lambda_0) \geq h$ pour $u_0 \leq u \leq 1$, avec un h positif. Si nous prenons ensuite μ_0 entre 1 et λ_0, la fonction $f_0(M) = r^{\mu_0}\Phi(u;\lambda_0)$ est surharmonique dans la région définie par $\cos\frac{x_n}{r} \geq u_0$, et le rapport $\frac{f_0(M)}{r^{\mu_0}}$ est borné inférieurement dans cette région par un nombre positif h.

3. Soit $\varphi(M)$ harmonique ou sous-harmonique dans un domaine infini $\mathcal{D}$, compris dans un cône $(Ox_n, OM) < \theta_0$ dont le demi-angle au sommet θ_0 est aigu. Supposons :

d'une part, que $\frac{\varphi(M)}{r}$ est borné supérieurement dans $\mathcal{D}$ (ou tout au moins dans la partie de $\mathcal{D}$ extérieure à une certaine sphère de centre O); $\varphi(M) \leq Ar$;

(1) Il est facile de montrer que $\Phi(u;\lambda)$ est une fonction décroissante de λ pour $0 \leq u \leq 1$. Nous n'aurons pas à utiliser cette propriété.

(2) Ceci exprime simplement que ru, c'est-à-dire x_n, est une fonction harmonique.

d'autre part, qu'il existe un nombre B, et pour chaque point frontière P de $\mathcal{D}$, un voisinage $\mathcal{V}_P$ tel qu'en tout point M de $\mathcal{V}_P$ contenu dans $\mathcal{D}$ la valeur de $v(M)$ ne surpasse pas B.

L'inégalité $v(M) \leq B$ *est alors vérifiée en tout point de* $\mathcal{D}$.

On peut supposer $B = 0$. Prenons $\varepsilon > 0$ et introduisons la fonction $f_0(M)$ du numéro précédent, en prenant $u_0 = \cos\theta_0$. On a sur $\mathcal{D}$ au voisinage d'un point frontière quelconque $v(M) \leq 0 < \varepsilon f_0(M)$; d'autre part, pour les valeurs de r suffisamment grandes, $v(M) \leq Ar \leq \varepsilon h r^{\mu_0}$.

Si l'on considère le domaine borné $\mathcal{D}'$ découpé dans $\mathcal{D}$ par une sphère de rayon suffisamment grand, la fonction surharmonique $\varepsilon f_0(M)$ majore $v(M)$ dans un voisinage de chaque point frontière, donc dans $\mathcal{D}'$ tout entier.

$v(M)$ est ainsi majoré en tout point de $\mathcal{D}$ par $\varepsilon f_0(M)$ quel que soit ε positif. On a donc bien $v(M) \leq 0$ dans $\mathcal{D}$ (1).

4. Gardons les mêmes hypothèses, et supposons de plus qu'il existe un nombre $B' < B$ tel que l'inégalité $v(M) \leq B'$ soit vérifiée sur $\mathcal{D}$ au voisinage de chaque point frontière extérieur à une certaine sphère S. Le lemme précédent, avec B' au lieu de B, s'applique à la fonction $v(M) - \frac{a}{r^{n-2}}$ où le coefficient positif a est pris assez grand pour que $B - \frac{a}{r^{n-2}} < B'$ dans S. Cette remarque nous permet d'énoncer le lemme suivant :

Si la fonction $v(M)$ *est harmonique ou sous-harmonique dans un domaine* $\mathcal{D}$ *contenu dans un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est aigu, si* $v(M)$ *est défini sur la frontière* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{D}$ (2) *et reste sous-harmonique sur* $\mathcal{D} + \mathcal{F}$ *on a*

$$\overline{\lim_{M \in \mathcal{D},\, r \to \infty}} v(M) = \overline{\lim_{P \in \mathcal{F},\, r \to \infty}} v(P). \quad (3)$$

5. Supposons maintenant que $\mathcal{D}$ soit un angle polyèdre d'arêtes $d_1, d_2, \ldots, d_n$. $v(M)$ vérifiant les hypothèses précédentes, nous supposons que $\frac{v(M)}{r}$ a une

---

(1) Le raisonnement reste valable si l'on remplace l'hypothèse $v(M) \leq Ar$ par la suivante :

$$\lim_{\rho \to \infty} \left[\frac{1}{\rho^{1+\varepsilon}} \text{borne sup}_{M \in \mathcal{D},\, r = \rho} v(M) \right] = 0$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

(2) Cette hypothèse n'est donnée que pour la commodité de l'énoncé; en l'abandonnant, il faudrait poser pour $P \in \mathcal{F}$, $w(P) = \overline{\lim_{M \in \mathcal{D},\, M \to P}} v(M)$ et l'énoncé du lemme deviendrait

$$\overline{\lim_{M \in \mathcal{D},\, r \to \infty}} v(M) = \overline{\lim_{P \in \mathcal{F},\, OP \to \infty}} w(P).$$

(3) La valeur commune des deux membres pouvant être finie ou infinie.

limite supérieure finie a_i quand M s'éloigne indéfiniment sur d_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Sur la droite support de d_i, orientée dans la direction d_i, nous prenons le point A_i tel que $\overline{OA_i} = a_i$ et nous considérons le $(n-1)$-plan H_i normal en A_i à d_i; soit F le point de concours de ces hyperplans. Le produit scalaire $\overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OM}$ est une fonction harmonique de M, égale sur d_i à $\overline{OA_i}.\overline{OM}$. Le lemme précédent appliqué à $v(M) - \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OM}$ montre, en opérant par récurrence sur n, que

$$\overline{\lim_{M \in \mathcal{O},\, r \to \infty}} \left[v(M) - \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OM} \right] \leq 0.$$

La limite supérieure de $\frac{v(M)}{r}$ quand M s'éloigne indéfiniment sur une demi-droite d intérieure à l'angle polyèdre ne peut donc surpasser $\overline{OL}$, si L désigne la projection de F sur la droite support de d.

IV. — L'indicatrice de croissance.

Considérons dans l'espace euclidien E^n un ensemble ouvert convexe $\mathfrak{A}$ ayant la propriété suivante : si le point M, autre que l'origine, appartient à $\mathfrak{A}$, la demi-droite ouverte d'origine O passant par M est tout entière contenue dans $\mathfrak{A}$. L'ensemble $\mathfrak{A}$ de ces demi-droites a les propriétés postulées au paragraphe précédent. Soit $v(M)$ une fonction définie et sous-harmonique, soit dans $\mathfrak{A}$, soit dans la partie de $\mathfrak{A}$ extérieure à un certain ensemble $\mathfrak{R}$ fermé et borné. Nous supposerons que $\frac{v(M)}{r}$ est bornée supérieurement sur $\mathfrak{A}$ ou sur $\mathfrak{A} - \mathfrak{R}$ (en excluant au besoin une sphère de centre O). A chaque demi-droite $d \in \mathfrak{A}$, dont nous désignerons le vecteur unitaire par $\vec{u}_d$, nous associons le nombre $h_d = \overline{\lim_{M \in d,\, r \to \infty}} \frac{v(M)}{r}$, le demi-espace fermé P_d défini par $\overrightarrow{OM}.\vec{u}_d \leq h_d$ et le bord H_d de P_d.

$d_1, d_2, \ldots, d_r$ étant un système de demi-droites de $\mathfrak{A}$, linéairement indépendantes, qui définissent une multiplicité linéaire $\mathfrak{M}^r$, nous considérons dans $\mathfrak{M}^r$ une demi-droite d intérieure à l'angle polyèdre d'arêtes $d_1, d_2, \ldots, d_r$; d appartient nécessairement à $\mathfrak{A}$. Le dernier énoncé du paragraphe précédent peut s'interpréter comme suit : l'intersection de $H_{d_1}, H_{d_2}, \ldots, H_{d_r}$ est dans Q_d ou sur H_d. Nous reconnaissons la condition (C^n) du lemme géométrique.

Par conséquent, *les points communs aux demi-espaces* P_d $(d \in \mathfrak{A})$ *forment un ensemble convexe fermé non vide* $\mathfrak{I}$ *dont les* H_d *sont les* $(n-1)$ *plans d'appui.* $\mathfrak{I}$ sera encore appelé l'*indicatrice de croissance* de $v(M)$ dans $\mathfrak{A}$.

SUR

LES FONCTIONS ENTIÈRES PÉRIODIQUES

PAR M. PHAM TINH-QUAT.

INTRODUCTION.

La théorie des fonctions entières est, à l'heure actuelle, l'une des plus remarquables de l'analyse, au double point de vue de l'étendue et de la précision des résultats obtenus.

L'étude du module de la fonction a été inaugurée par MM. Borel et Hadamard. Après la notion de genre due à Laguerre, M. Borel a introduit la notion d'ordre qui s'avère plus commode pour rendre compte de la croissance de la fonction et du comportement de la suite de ses zéros.

L'étude des arguments des zéros de la fonction et des valeurs exceptionnelles liées au théorème fondamental de Picard sur le voisinage d'un point singulier essentiel isolé a été abordée avec succès par M. Julia.

Il n'est pas possible de citer ici tous les résultats généraux et remarquables qui ont été obtenus sur les fonctions entières.

Le but de ce travail est d'étudier un cas particulier : les fonctions entières périodiques. Il ne sera question ici que des fonctions d'ordre fini. Le cas des fonctions d'ordre infini, ainsi que le cas des fonctions méromorphes périodiques qui donnent lieu à maintes propriétés analogues à celles des fonctions périodiques d'ordre fini feront l'objet de mes prochains mémoires.

Certaines propriétés des fonctions entières périodiques sont intuitives dès que l'on a établi une correspondance entre ces fonctions et certaine classe de fonctions entières d'ordre nul.

Cependant, les méthodes directes employées ici permettent d'obtenir souvent une grande précision, notamment dans le problème des cercles de remplissage et des directions d'accumulation des zéros de la fonction.

Les deux premiers chapitres traitent de la construction des fonctions entières périodiques à partir de la donnée d'une suite de zéros « fondamentaux » ayant un exposant de convergence fini.

J'arrive aux propositions suivantes :

Toute fonction de genre fini s'exprime par un produit infini de facteurs sinusoïdaux, la convergence de ce produit étant absolue et uniforme dans tout domaine fini.

Toute fonction $f(z)$ de période 2π s'exprime par un produit de deux fonctions entières d'ordre nul, l'une en e^{iz}, l'autre en e^{-iz}.

L'expression de la fonction en produit infini de sinus permet, dans le Chapitre III, d'obtenir une valeur asymptotique du module maximum de la fonction sur un cercle de centre l'origine.

J'obtiens également une expression simple du module de la fonction à l'aide de x et y, valable dans tout le plan, en dehors de petits domaines entourant les zéros, domaines dont j'ai évalué les dimensions maxima.

Une application simple de cette dernière proposition est l'impossibilité pour une fonction entière périodique d'ordre fini d'admettre plus d'une valeur asymptotique.

Le Chapitre IV est consacré à la distribution des valeurs de la fonction et en particulier au cas des fonctions à croissance régulière.

Pour les fonctions ne se réduisant pas à une combinaison finie d'exponentielles, je démontre l'absence des valeurs exceptionnelles finies au sens de Picard. Pour celles qui sont à croissance régulière, il existe ce que j'appelle des domaines de régularité communs à $f(z)$ et $f(z)-x$. Dans un de ces domaines, le rapport des zéros de même rang de ces deux fonctions est fini et d'autant plus voisin de 1 que l'ordre de la fonction $f(z)$ est plus proche de l'unité.

Ce rapport tend effectivement vers 1 dans le cas particulier des fonctions d'ordre 1 à croissance régulière pour lesquelles le rapport $\log r_n : \log n$ finit par être constamment croissant (r_n désigne ici le module de la partie imaginaire du zéro « fondamental » de rang n).

Enfin, le Chapitre V traite des directions de Borel et des cercles de remplissage. Les méthodes employées sont inspirées des travaux de MM. Milloux et Valiron concernant les fonctions entières générales et particulièrement les fonctions d'ordre nul.

Pour les fonctions entières périodiques, toute demi-droite issue de l'origine et située d'un certain côté du plan est une direction de Borel. Pas plus qu'il n'y a de valeurs exceptionnelles finies au sens de Picard, il n'y a de valeurs exceptionnelles finies au sens de M. Borel. En dehors des directions de Borel, je montre l'existence de bandes de largeur arbitrairement petite dans chacune desquelles l'ordre du nombre de zéros de la fonction $f(z)-Z$ est inférieur

d'une unité à l'ordre de la fonction, et ce, pour toutes les valeurs de Z sauf deux au plus.

Ces bandes contiennent des cercles de remplissage de rayon arbitrairement petit et d'ordre $\rho - 1$ pour les fonctions d'ordre $\rho + 1$ supérieur à 2.

Pour les fonctions d'ordre inférieur à 2, il existe simplement, dans ces bandes, des domaines de dimensions infiniment petites tels que dans chacun de ces domaines dont le rang est assez grand la fonction prend au moins une fois toute valeur donnée à l'avance.

Ces diverses propositions permettent de retrouver des cas particuliers des propriétés connues des fonctions entières d'ordre nul (théorèmes de MM. Littlewood et Valiron).

En terminant, je voudrais exprimer toute ma gratitude à M. Valiron qui m'a encouragé tout au long de ce travail, et m'a donné, à maintes reprises, de précieux conseils.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

1. *Définitions.* — Il s'agit ici de fonctions entières à une période. Je désigne par ω la période, réelle ou complexe, et je conviens de ranger les zéros de la forme $a + k\omega$ par modules croissants, par exemple

$$a, \quad a - \omega, \quad a + \omega, \quad a - 2\omega, \quad \ldots$$

Une telle suite est ce que j'appelle une suite primaire, et a le zéro fondamental de la suite primaire. Tout zéro fondamental est situé dans une bande de largeur ω symétrique par rapport à l'origine et perpendiculaire à la droite $O\omega$.

Une fonction entière périodique possède un nombre fini de suites primaires ou en possède une infinité. Je conviens de ranger les zéros fondamentaux tels que les modules des parties imaginaires soient croissants. La suite

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots \quad a_n, \quad \ldots$$

sera appelée suite fondamentale de la fonction.

J'appelle suite complète de la fonction la suite de tous ses zéros rangés par modules croissants. Il est utile de considérer le tableau (T)

$$\begin{array}{|l}
a_1 \quad a_1 - \omega \quad a_1 + \omega \quad a_1 - 2\omega \quad \ldots \\
a_2 \quad a_2 - \omega \quad a_2 + \omega \quad a_2 - 2\omega \\
\ldots \\
a_n \quad \ldots \\
\ldots
\end{array}$$

où les éléments de la première colonne représentent la suite fondamentale de la fonction.

2. *Exposants des diverses suites.* — L'exposant de convergence de la suite primaire est toujours l'unité. La série

$$\left|\frac{1}{a}\right| + \left|\frac{1}{a-\omega}\right| + \left|\frac{1}{a+\omega}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{a-p\omega}\right| + \ldots$$

est divergente. D'autre part

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{a-\omega} + \frac{1}{a+\omega} + \ldots + \frac{1}{a-p\omega} + \ldots = \frac{\pi}{\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi a}{\omega}.$$

Je suppose essentiellement que la suite fondamentale a un exposant de convergence fini ρ.

Quel est tout d'abord l'exposant de la suite complète ou du tableau (T)?

Remarque. — Si l'on pose

$$\omega = |\omega| e^{i\alpha}$$

la rotation

$$z = u e^{i\alpha}$$

ramène la fonction périodique de période ω à une fonction périodique de période réelle $|\omega|$.

Je peux donc supposer, dans toute la suite, et sans restreindre la généralité, que ω est réel.

D'autre part, pour chercher l'exposant de la suite complète, je peux faire une translation parallèle à l'axe réel qui amène le zéro fondamental a_n sur l'axe imaginaire; ceci revient en effet à remplacer les termes de la série positive

$$\sum\sum |a_n \pm p\omega|^{-\mu}$$

par des infiniment petits équivalents.

La suite fondamentale devient alors

$$ir_1, \quad ir_2, \quad ir_3, \quad \ldots, \quad ir_n, \quad \ldots$$

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} |ir_n + p\omega|^{-\mu} = \sum_{n}\sum_{p} (r_n^2 + p^2\omega^2)^{-\frac{\mu}{2}}$$

est de même nature que l'intégrale

$$\iint |r^2(y) + \omega^2 x^2|^{-\frac{\mu}{2}} dx\, dy$$

étendue à tout le demi-plan supérieur; $r(y)$ désigne une fonction continue, positive, décroissante, égale à r_n pour $y = n$. On écarte, bien entendu, le cas échéant, le zéro qui coïncide avec l'origine dans la série double.

L'intégrale s'écrit encore

$$\int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} [r^2(y) + \omega^2 x^2]^{-\mu} dx.$$

En posant

$$\omega x = r \operatorname{tg} \theta$$

on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} (r^2 + \omega^2 x^2)^{-\mu} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega r^{2\mu-1}} \cos^{2\mu-2}\theta \, d\theta.$$

Cette intégrale n'est convergente que si $\mu > \frac{1}{2}$.

Ensuite l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\omega r^{2\mu-1}} dy$$

est de même nature que la série $\Sigma r_n^{1-2\mu}$. Elle est donc convergente si

$$2\mu - 1 > \rho.$$

En résumé la série double est convergente si

$$2\mu > 1 + \rho.$$

Donc *l'exposant de la suite complète est la somme des exposants d'une suite primaire et de la suite fondamentale.*

Il est à remarquer encore que pour $2\mu = 1 + \rho$ la série double est convergente en même temps que la série

$$\Sigma |a_n|^{-\rho}.$$

3. *Quelques propriétés du tableau* (T). — Soit

$$A_n = \frac{1}{a_n} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - p\omega} + \frac{1}{a_n + p\omega} = \frac{\pi}{\omega} \operatorname{cotg} \frac{\pi a_n}{\omega}$$

et plus généralement, k étant un entier positif

$$A_n^k = a_n^{-k} + \sum_{p=1}^{\infty} [(a_n - p\omega)^{-k} + (a_n + p\omega)^{-k}].$$

Comme cette dernière série est absolument convergente dès que k est supérieur ou égal à 2, on peut encore écrire

$$A_n^k = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (a_n + p\omega)^{-k}.$$

Si l'on écrit

$$A_n = A_n^1,$$

en convenant d'associer dans la sommation les termes qui correspondent à deux valeurs symétriques de p, on voit que tous les A_n^k s'obtiennent à partir des A_n par des dérivations par rapport à la variable a_n.

Les dérivations successives donnent

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (z + p\omega)^{-h} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^h \sin^{-h}\frac{\pi z}{\omega}\, P_{h-2}\left(\cos\frac{\pi z}{\omega}\right),$$

$P_{h-2}(u)$ désigne un polynome de degré $h-2$ par rapport à la variable u. Pour déterminer ce polynome, on a la formule de récurrence

$$h\, P_{h-1} = (1-u^2)\, P'_{h-2} - hu\, P_{h-2}$$

d'où l'on déduit que le coefficient du terme de plus haut degré de P_{h-2} est

$$\frac{2^{h-2}}{(h-1)!}$$

et que $P_{h-2}(u)$ ne contient que des puissances de u de même parité que h.

$$A_n^k = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^k \sin^{-k}\frac{\pi a_n}{\omega}\, P_{k-2}\left(\cos\frac{\pi a_n}{\omega}\right) \qquad (k \geq 2).$$

L'hypothèse faite sur la suite fondamentale, savoir qu'elle admet un exposant de convergence fini ρ, fournira des propriétés intéressantes sur le tableau (T).

Je dis que, quelle que soit la valeur de l'entier $k \geq 2$, et quel que soit ρ, la série

$$A_1^k + A_2^k + A_3^k + \ldots + A_n^k + \ldots$$

est absolument convergente.

En effet, quand n augmente indéfiniment, le rapport de la partie réelle à la partie imaginaire de $\frac{a_n}{\omega}$ tend vers zéro, tandis que le module de ce nombre augmente indéfiniment. Si l'on désigne par ir_n la partie imaginaire de $\frac{a_n}{\omega}$, $\sin\frac{\pi a_n}{\omega}$ et $\cos\frac{\pi a_n}{\omega}$ sont équivalents à

$$\frac{1}{2} e^{|\pi r_n|}$$

et A_n^k est un infiniment petit équivalent à

$$\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^k \frac{r_n^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\pi r_n}.$$

La propriété sera démontrée si l'on montre que la série de terme général

$$u_n = e^{-2\pi|r_n|}$$

est convergente quelle que soit la suite r_n pourvu que cette suite admette un exposant de convergence fini.

On peut écrire

$$n^q u_n = e^{-2\pi|r_n| + q\log n}.$$

Or la série de terme général $|a_n|^{-\rho-\varepsilon}$ est convergente, à termes positifs et décroissants.

D'après une propriété connue

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} = 0 \quad (^1).$$

A partir d'une valeur suffisamment grande de n, on a

$$|u_n| > n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} \qquad \text{donc} \qquad |r_n| > A\, n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}$$

(A constante positive). Ensuite

$$-2\pi|r_n| + q\log n < -2\pi A\, n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} + q\log n.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers $-\infty$ quand n augmente indéfiniment. Il en est donc de même du premier membre. En prenant q supérieur à 1 on voit que la série de terme général u_n est convergente.

Quant à A_n, il est équivalent à $-\varepsilon_n i\frac{\pi}{\omega}$ quand n tend vers ∞.

($\varepsilon_n = +1$ ou -1 selon que le coefficient de la partie imaginaire de $\frac{a_n}{\omega}$ est positif ou négatif).

L'expression

$$A_n + \varepsilon_n i\frac{\pi}{\omega}$$

est équivalente à

$$-2\varepsilon_n i\frac{\pi}{\omega} e^{-\frac{2\pi|a_n|}{i\omega}}.$$

D'après ce qui précède, la série de terme général

$$A_n + \varepsilon_n i\frac{\pi}{\omega}$$

est encore absolument convergente.

Je désignerai, dans la suite, par B la somme de cette dernière série, et par B_k la somme de la série de terme général A_n^k.

---

(1) Borel. *Leçons sur les fonctions entières* (Gauthier-Villars, Paris).

CHAPITRE II.

CONSTRUCTION DES FONCTIONS ENTIÈRES PÉRIODIQUES DE GENRE FINI.

4. *Fonctions à suite fondamentale limitée.* — La période de la fonction est supposée égale à 2π.

Le produit infini

$$\prod_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a-2p\pi}\right)$$

où les facteurs sont groupés dans l'ordre

$$1-\frac{z}{a},\quad 1-\frac{z}{a-2\pi},\quad 1-\frac{z}{a+2\pi},$$

est semi-convergent et a pour valeur

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-z)}{\sin\frac{1}{2}a}.$$

Par suite

$$\prod_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a-2p\pi}\right)e^{\frac{z}{a-2p\pi}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-z)}{\sin\frac{1}{2}a}e^{z\cot g\frac{1}{2}a}.$$

La convergence du produit infini est absolue et uniforme.

Il suit de là que toute fonction à suite fondamentale limitée est de la forme

$$f(z)=Ce^{F(z)}e^{\left(k-\frac{1}{2}\Sigma\varepsilon_p\right)iz}\prod_{p=1}^{n}\sin\frac{1}{2}(a_p-z)$$

dans laquelle $F(z)$ désigne une fonction entière périodique quelconque de période 2π, C une constante, k un entier arbitraire, ε_p ayant la même signification qu'au n° 3.

Lorsque $F(z)$ est constante, la fonction $f(z)$ est de nature élémentaire et ne fournit aucune transcendante nouvelle. Voici quelques conséquences immédiates qu'il suffit d'énoncer :

Il n'existe pas de fonction réelle entière périodique à une seule suite primaire et à période réelle; plus généralement, toute fonction entière réelle périodique admet un nombre pair de suites primaires si la période est réelle.

Si une fonction entière périodique réelle a toutes ses racines réelles, elle est évidemment à suite fondamentale limitée; elle rentre dans la catégorie précé-

dente et s'exprime par un produit, en nombre pair, de sinus, multiplié par $e^{F(z)}$, $F(z)$ étant une fonction entière réelle périodique et de même période.

5. *Les fonctions générales de genre k.* — Si l'exposant ρ de la suite fondamentale n'est pas un nombre entier, je vais montrer qu'on peut construire effectivement une fonction entière périodique de genre $k < 1+\rho$ (k désigne l'entier immédiatement inférieur à $1+\rho$) en multipliant le produit canonique de facteurs primaires de genre k admettant les mêmes zéros que la fonction par $e^{Q(z)}$, où $Q(z)$ désigne un polynome de degré k convenablement choisi.

Si ρ est entier, la seule différence est que l'on a $k=\rho$ ou $k=1+\rho$ selon que ρ rend convergente ou divergente la série des inverses des modules des nombres de la suite fondamentale de la fonction.

Avant de passer au cas général, il est utile de considérer d'abord les fonctions de genre 1.

Supposons donc $\rho < 1$, et soit

$$c_n(z)=\prod_{-z}^{z}\left(1-\frac{z}{a_n-2p\pi}\right)e^{\frac{z}{a_n-2p\pi}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a_n-z)}{\sin\frac{1}{2}a_n}e^{A_n z}.$$

Il est facile de vérifier que $c_n(z)$ tend vers 1 quand n augmente indéfiniment. En effet, le rapport des sinus est équivalent à $e^{\frac{1}{2}\varepsilon_n i z}$, et A_n est équivalent à $-\frac{1}{2}\varepsilon_n i$.

Et

$$c_n(z+2\pi)=c_n(z)e^{\left(A_n+\frac{1}{2}\varepsilon_n i\right)2\pi}$$

$c_n(z)$ tend donc à devenir périodique quand n augmente indéfiniment.

Ceci posé, une fonction de genre 1 peut se mettre sous la forme

$$f(z)=Ce^{Bz}c_1(z)c_2(z)\dots c_n(z)\dots$$

où B a la signification du n° 3.

Si l'on pose

$$f_n(z)=Ce^{D_n z}c_1(z)c_2(z)\dots c_n(z)$$

avec

$$D_n=\sum_{1}^{n}\left(A_p+\frac{1}{2}\varepsilon_p i\right)$$

c'est-à-dire

$$f_n(z)=Cg_1(z)g_2(z)\dots g_n(z)$$

avec

$$g_p(z)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a_p-z)}{\sin\frac{1}{2}a_p}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_p iz}$$

on obtient une suite de fonctions $f_n(z)$ toutes périodiques à suite fondamentale limitée.

Il est facile de voir que cette suite de fonctions $f_n(z)$ tend uniformément vers la limite $f(z)$ dans tout domaine fini.

En effet, pour montrer que le produit infini

$$\prod_1^{\infty} g_p(z)$$

est absolument et uniformément convergent, il suffit de faire voir que la série de terme général

$$w_n(z) = g_n(z) - 1$$

est absolument et uniformément convergente. Or on a

$$w_n(z) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a_n - z)}{\sin\frac{1}{2}a_n} e^{-\frac{i}{2}\varepsilon_n z} - 1 = \frac{e^{-i\varepsilon_n z} - 1}{1 - e^{-i\varepsilon_n a_n}}.$$

Le numérateur de la dernière fraction est borné quand z décrit un domaine fini quelconque. Si l'on pose

$$a_n = b_n + \varepsilon_n i r_n \qquad (r_n \text{ positif})$$

on voit que le carré du module du dénominateur s'écrit

$$e^{2r_n} - 2e^{r_n}\cos b_n + 1.$$

Quand z décrit un domaine fini, la valeur absolue de $w_n(z)$ est majorée par

$$\frac{A}{e^{2r_n} - 1}$$

(A désigne une certaine constante indépendante de z).

D'après le n° 3, cette dernière série est convergente, ce qui démontre la proposition.

La fonction entière périodique de genre 1 la plus générale s'obtient en multipliant $f(z)$ par e^{tiz}, t désignant un entier arbitraire. D'où :

THÉORÈME. — *Toute fonction entière périodique de genre* 1 *est la limite d'une suite de fonctions de même nature, à suite fondamentale limitée, cette limite étant atteinte uniformément dans tout domaine fini quelconque.*

Si l'on avait posé

$$F_n(z) = Ce^{-Bz} v_1(z) v_2(z) \dots v_n(z)$$

on aurait eu une suite de fonctions dont aucune n'est périodique et dont la limite est la fonction périodique $f(z)$.

Passons maintenant aux fonctions de genre k. Posons

$$\varphi_n(z) = \prod_{p=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{a_n - 2p\pi}\right) e^{\frac{z}{a_n - 2p\pi} + \ldots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n - 2p\pi}\right)^k}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a_n - z)}{\sin\frac{1}{2}a_n} e^{A_n z - \frac{1}{2}A_n^2 z^2 - \ldots - \frac{1}{k}A_n^k z^k}.$$

On vérifie comme tout à l'heure que $\varphi_n(z)$ tend à devenir périodique quand n augmente indéfiniment. Soit

$$V(z) = \lim_{n=\infty} \varphi_1(z)\,\varphi_2(z)\ldots\varphi_n(z).$$

Une fonction de genre k est de la forme $f(z) = Ce^{Q(z)}V(z)$ où $Q(z)$ désigne un polynome de degré k au plus. En écrivant que $f(z)$ a pour période 2π on obtient immédiatement pour $Q(z)$ la valeur suivante

$$Q(z) = -(B + ti)z - \frac{1}{2}B_2 z^2 - \ldots - \frac{1}{k}B_k z^k$$

à une constante additive près, t désignant un entier arbitraire.

Si l'on pose maintenant

$$Q_n(z) = -\left[\sum_1^n \left(A_p + \frac{1}{2}\varepsilon_p\right) + ti\right] z - \frac{1}{2}\sum_1^n A_p^2 z^2 - \ldots - \frac{1}{k}\sum_1^n A_p^k z^k,$$

$$f_n(z) = Ce^{Q_n(z)} \prod_{p=1}^{n} \varphi_p(z) = Ce^{tiz} \prod_{p=1}^{n} g_p(z),$$

$g_p(z)$ ayant la même signification que plus haut, on obtient une suite de fonctions toutes périodiques, $f_n(z)$, à suite fondamentale limitée. Cette suite tend uniformément, comme le prouve la démonstration de tout à l'heure, vers la limite $f(z)$, quand z décrit un domaine fini quelconque. D'où :

THÉORÈME. — *Toute fonction entière périodique de genre k est la limite d'une suite de fonctions de genre 1 à suite fondamentale limitée, cette limite étant atteinte uniformément dans tout domaine fini.*

Si l'on avait posé, comme plus haut

$$F_n(z) = Ce^{Q(z)}\varphi_1(z)\,\varphi_2(z)\ldots\varphi_n(z)$$

on aurait eu une suite de fonctions dont aucune n'est périodique et dont la limite est la fonction périodique $f(z)$ de genre k.

6. *Expression de $f(z)$ à l'aide de $u = e^{iz}$.* — Posons

$$u_p = e^{iz_p}.$$

La fonction $f_n(z)$ du numéro précédent, débarrassée du facteur exponentiel e^{iz} s'écrit

$$f_n(z) = \mathrm{C} u^{-h_n} \prod_{p=1}^{n} \frac{u - u_p}{u_p} \qquad \text{avec} \qquad 2h_n = \sum_{1}^{n} (1 + \varepsilon_p).$$

Pour simplifier le langage, j'appelle zéro de la première catégorie, tout zéro situé du côté des y positifs, et zéro de la deuxième catégorie, tout zéro situé du côté des y négatifs.

La contribution à h_n d'un zéro de la deuxième catégorie est nulle, celle d'un zéro de la première catégorie est l'unité. L'entier h_n désigne par suite le nombre de zéros de la première catégorie.

En séparant les facteurs correspondant aux deux catégories de zéros, on obtient

$$f_n(z) = \mathrm{C} \prod \frac{1 - \frac{u_p}{u}}{1 - u_p} \prod \frac{1 - \frac{u}{u_p}}{1 - \frac{1}{u_p}}.$$

Le premier produit ne renferme que les zéros de la première catégorie, le second les zéros de la deuxième catégorie.

Je vais montrer maintenant que lorsque n augmente indéfiniment, les deux produits en $\frac{1}{u}$ et en u tendent respectivement vers deux frontières entières, l'une en $\frac{1}{u}$ l'autre en u, ces deux fonctions étant toutes les deux de genre zéro et d'ordre zéro.

Pour un zéro de la deuxième catégorie, on a

$$\frac{1}{u_p} = e^{-ib_p} e^{-r_p}.$$

Comme b_p est borné, la série de terme général $\frac{1}{u_p}$ est absolument convergente, puisque la suite r_p a un exposant fini. Donc le produit en u dans l'expression $f_n(z)$ tend uniformément vers une limite, qui est une fonction entière de u de genre zéro, soit

$$\mathrm{G}(u) = \prod \left(1 - \frac{u}{u_p}\right).$$

Un zéro de la première catégorie donne

$$u_p = e^{ib_p} e^{-r_p}.$$

La série de terme général u_p est encore absolument convergente; le produit en $\frac{1}{u}$ dans l'expression $f_n(z)$ tend encore uniformément vers une limite quand u décrit un domaine quelconque ne comprenant pas l'origine. Cette limite est une fonction entière en $\frac{1}{u}$ de genre zéro également, soit

$$F\left(\frac{1}{u}\right)=\prod^{\infty}\left(1-\frac{u_p}{u}\right).$$

Par suite, on a

$$f(z)=\frac{C}{F(1)G(1)}F\left(\frac{1}{u}\right)G(u).$$

Théorème. — *Toute fonction entière périodique de genre fini s'exprime par un produit de deux fonctions entières, l'une en $\frac{1}{u}$, l'autre en u, toutes les deux étant de genre zéro et d'ordre zéro.*

7. *Correspondance entre les fonctions entières périodiques et les fonctions entières d'ordre nul.* — Le quotient $\sin\frac{1}{2}(a_n-z):\sin\frac{1}{2}a_n$ ne change pas quand on remplace a_n par $a_n+2p\pi$. On peut remplacer un zéro fondamental par un zéro quelconque de la même suite primaire sans changer les deux fonctions $F\left(\frac{1}{u}\right)$ et $G(u)$.

Je conviens d'appeler encore suite positive et suite négative les deux suites fondamentales et fonction positive et fonction négative associées à $f(z)$ les deux fonctions $F\left(\frac{1}{u}\right)$ et $G(u)$.

Réciproquement, étant données deux fonctions entières $F(v)$ et $G(u)$ on peut faire correspondre une fonction entière périodique de période 2π et admettant comme zéros les nombres

$$i\log u_p \qquad \text{et} \qquad i\log v_p$$

(u_p et v_p désignent les zéros de G et F), soit

$$f(z)=AF\left(\frac{1}{u}\right)G(u) \qquad (u=e^{iz}).$$

La fonction $f(z)$ sera d'ordre fini si F et G sont d'ordre nul et si en plus les exposants de convergence des suites $\log|u_p|$ et $\log\left|\frac{1}{v_p}\right|$ sont finis.

Remarque. — On peut encore mettre $f(z)$ sous la forme d'une somme de deux fonctions entières d'ordre nul en $\frac{1}{u}$ et u respectivement. En effet la trans-

formation $u = e^{iz}$ transforme $f(z)$ en une fonction de u admettant $u = 0$ comme point singulier essentiel, donc

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n u^n = \mathrm{P}\left(\frac{1}{u}\right) + \mathrm{Q}(u)$$

avec

$$\mathrm{P}(v) = \sum_{1}^{\infty} c_{-n} v^n; \qquad \mathrm{Q}(u) = \sum_{0}^{\infty} c_n u^n.$$

Il est facile maintenant d'avoir des relations simples entre les modules maxima des fonctions f, F, G, P, Q sur des cercles centrés à l'origine.

Si $|z| = r$, on a

$$e^{-r} \leq |u| \leq e^{r}$$

et

$$\mathrm{M}(f, r) \leq \mathrm{M}(\mathrm{P}, e^r) + \mathrm{M}(\mathrm{Q}, e^r),$$
$$\log \mathrm{M}(f, r) \leq \log \mathrm{M}(\mathrm{F}, e^r) + \log \mathrm{M}(\mathrm{G}, e^r),$$

la notation $\mathrm{M}(f, r)$ désigne le module maximum de $f(z)$ sur le cercle $|z| = r$. Si $|u| = e^{r'}\left(r' = \sqrt{r^2 - \pi^2}\right)$ on a $\mathrm{I}z = -r'$ et

$$|f(z)| \leq \mathrm{M}(f, r),$$
$$\mathrm{M}(\mathrm{Q}, e^{r'}) + \mathrm{O}(1) \leq \mathrm{M}(f, r),$$
$$\log \mathrm{M}(\mathrm{G}, e^{r'}) + \mathrm{O}(1) \leq \log \mathrm{M}(f, r),$$

et des inégalités analogues pour P et F. Par suite

$$\mathrm{M}(f, r') \leq \mathrm{M}(\mathrm{P}, e^{r'}) + \mathrm{M}(\mathrm{Q}, e^{r'}) \leq 2\,\mathrm{M}(f, r) + \mathrm{O}(1).$$
$$\log \mathrm{M}(f, r') \leq \max[\log \mathrm{M}(\mathrm{F}, e^{r'}), \log \mathrm{M}(\mathrm{G}, e^{r'})] \leq \log \mathrm{M}(f, r) + \mathrm{O}(1).$$

Ces inégalités permettent facilement d'avoir l'ordre de la fonction $f(z)$ si l'on connaît l'ordre d'infinitude des coefficients du développement de Taylor de P, Q ou de F, G,

Par exemple, si l'on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \log \left|\frac{1}{c_{-n}}\right|}{\log n} = 1 + k$$

on en déduit, d'après un calcul connu, en remarquant que pour toute fonction entière d'ordre fini ou nul le logarithme du module maximum est asymptotiquement équivalent au logarithme du terme maximum (1),

$$\overline{\lim_{\mathrm{R}=\infty}} \frac{\log_2 \mathrm{M}(\mathrm{P}, \mathrm{R})}{\log_2 \mathrm{R}} = 1 + \frac{1}{k}.$$

(1) Valiron, *Thèse*, Paris, 1914.

Le calcul peut être conduit de la façon suivante : si l'on pose $g(n) = \log \left|\frac{1}{c_{-n}}\right|$ l'hypothèse se

De même, si l'on a une égalité analogue pour c_n (où k est remplacé par k'), on déduit une égalité analogue pour M(Q, R).

L'exposant de convergence de la suite des zéros fondamentaux de $f(z)$ est par suite égal au plus grand des deux nombres $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k'}$ (*cf.* Chap. III).

On obtient des conclusions identiques en raisonnant sur les fonctions F et G.

CHAPITRE III.

LA CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES PERIODIQUES DE GENRE FINI.

8. On sait, depuis les travaux fondamentaux de Poincaré et de M. Borel, comment se comporte le module maximum d'une fonction entière de genre fini.

Si ρ désigne l'ordre de la fonction, on a

$$r^{\rho-\varepsilon} < \log M(r) < r^{\rho+\varepsilon},$$

la seconde inégalité étant satisfaite à partir d'une valeur suffisamment grande de r, la première, pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de r.

Si la série

$$\Sigma |a_n|^{-\rho},$$

est convergente, on peut même remplacer la seconde inégalité par

$$\log M(r) < \varepsilon r^{\rho}.$$

Divers auteurs ont amélioré les limites du module maximum $M(r)$ en faisant des hypothèses plus ou moins restrictives sur la suite des zéros.

---

traduit par

$$(k+1-\varepsilon)\log n < \log g(n) < (k+1+\varepsilon)\log n,$$

la seconde inégalité est satisfaite pour une infinité d'indices n_p. Le logarithme du terme maximum, soit $\log m(R)$, satisfait à

$$n\log R - n^{k+1+\varepsilon} < \log m(R) < n\log R - n^{k+1-\varepsilon}.$$

Le maximum du dernier terme est égal à $A\,(\log R)^{1+\frac{1}{k-\varepsilon}}$ ($A = \text{const.}$).

Si l'on se borne aux valeurs de R correspondant aux indices n_p le maximum de $\log m(R)$ est supérieur au maximum du premier terme, soit

$$B\,(\log R)^{1+\frac{1}{k+\varepsilon}}$$

pour ces valeurs de R; ce qui démontre le résultat.

Je rappelle notamment les résultats de M. Boutroux (¹)

$$\log M(r) < h\,N,$$

où N désigne le nombre de zéros de module inférieur à r, et h une constante. Ce résultat est valable dans le cas où l'ordre ρ n'est pas entier. Si l'ordre ρ est entier, la limite trouvée est un peu moins bonne, les arguments des zéros semblent devoir intervenir.

Dans le cas particulier des fonctions entières périodiques où les zéros fondamentaux se comportent comme ceux d'une fonction orientée, il est clair qu'on peut espérer resserrer les limites de $\log M(r)$; comme la notion de genre disparaît complètement ici en faveur de la notion d'ordre, on peut s'attendre *a priori* à ce qu'il n'y ait aucune différence entre le cas de l'ordre entier et le cas de l'ordre non entier.

On sait, d'autre part, qu'on peut construire des fonctions entières d'ordre fini, de croissance très irrégulière. D'une façon précise, $\log M(r)$ peut osciller entre r^p et r^q où p et q désignent deux nombres positifs arbitraires.

On verra qu'il n'en est rien pour les fonctions entières périodiques, et que la limite inférieure de $\log M(r)$ ne peut descendre au-dessous de $A\,r$, A désignant un nombre positif donné à l'avance.

Une autre notion importante qui caractérise la croissance de la fonction est le module de la fonction sur une droite parallèle aux suites primaires. Si pour le module maximum on obtient, en général, les mêmes limites sur un cercle de rayon r centré à l'origine et sur une parallèle aux suites primaires dont la distance à l'origine est équivalente à r, on obtient dans le second cas une limite très précise pour le module minimum, si l'on exclut du plan des petits rectangles entourant les zéros et dont les dimensions tendent vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Les méthodes que j'emploie, dans ce chapitre, sont toutes inspirées des méthodes de M. Borel, devenues depuis longtemps classiques.

9. La période de la fonction est encore supposée égale à 2π.

Je pose

$$a_n = b_n + \varepsilon_n i\, r_n \quad \ldots (r_n \text{ positif}),$$
$$z = x + iy,$$

et j'appelle facteur primaire sinusoïdal la quantité

$$g(a_n, z) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a_n - z)}{\sin \frac{1}{2} a_n} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_n i z}$$

(¹) Boutroux, *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (*Thèse*, Paris 1903, *Acta Math.*, t. 28, 1904).

On a immédiatement

$$g(a_n, z) = \frac{1 - e^{i\varepsilon_n(a_n - z)}}{1 - e^{i\varepsilon_n a_n}}.$$

Dans le cas où $\varepsilon_n = 1$, le numérateur s'écrit

$$1 - e^{y - r_n}\cos(b_n - x) - i\, e^{y - r_n}\sin(b_n - x).$$

Dans le cas où $\varepsilon_n = -1$, il suffit de changer de signe

$$b_n, \quad x \quad \text{et} \quad y.$$

Le carré du module du numérateur s'écrit

$$e^{2(y - r_n)} - 2\, e^{y - r_n}\cos(b_n - x) + 1,$$

b_n étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Le module du numérateur est par suite inférieur à

$$e^{y - r_n} + 1 \quad \text{ou encore à} \quad e^{r - r_n} + 1.$$

On a donc, quels que soient a_n et z

$$|g(a_n, z)| < \frac{1 + e^{r - r_n}}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|}.$$

Soit à chercher maintenant une limite inférieure du module maximum de $g(a_n, z)$.

Si l'on fait $b_n = x_1 \pm \pi$, le numérateur de g se réduit à

$$1 + e^{y_1 - r_n},$$

où y_1 désigne la valeur de y correspondant à x_1.

Ceci prouvé que la valeur du module maximum de g est au moins égale à

$$\frac{1 + e^{y_1 - r_n}}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|}.$$

Le point x_1, y_1 est sur l'arc situé à l'intérieur de la bande hachurée, et si l'on désigne par ε l'angle que fait Oy avec le rayon aboutissant à l'une des extrémités de ces arcs, on a

$$y_1 > r\cos\varepsilon, \qquad \sin\varepsilon = \frac{\pi}{r}.$$

Quand r augmente indéfiniment ε tend vers zéro. On peut donc choisir r assez grand pour que, η étant donné à l'avance positif, on ait

$$y_1 > r - \eta.$$

Ceci revient en effet à écrire

$$\eta > r(1 - \cos\varepsilon) = r\left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots\right),$$

ε étant du premier ordre par rapport à $\frac{1}{r}$, cette inégalité est bien vérifiée pour r suffisamment grand. Par suite on aura constamment pour des valeurs suffisamment grandes de r

$$e^{\varepsilon_n r - r_n} > \lambda\, e^{r - r_n} \quad (\lambda = e^{-\eta}).$$

Comme η est positif et quelconque, λ désigne alors un nombre fixe quelconque compris entre o et 1, aussi voisin de 1 que l'on voudra.

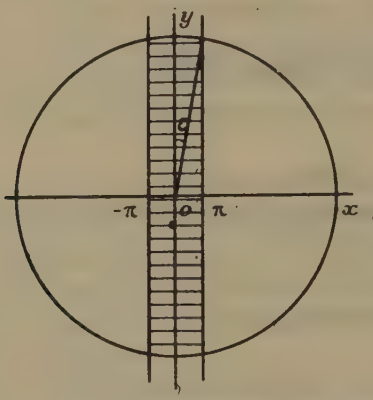


Fig. 1.

En résumé, le module maximum du facteur primaire sinusoïdal est compris entre

$$\frac{1 + \lambda e^{r - r_n}}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|} \quad \text{et} \quad \frac{1 + e^{r - r_n}}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|},$$

lorsque le module de z, soit r est constant et suffisamment grand.

Si l'on suppose maintenant que z décrit une parallèle aux suites primaires, c'est-à-dire que y est constant, on voit immédiatement que le maximum du module du facteur primaire sinusoïdal est égal à

$$\frac{1 + e^{\varepsilon_n y - r_n}}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|},$$

tandis que le *minimum* du module de ce même facteur est égal à

$$\frac{|1 - e^{\varepsilon_n y - r_n}|}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|}.$$

Je désignerai par $M(y)$ le maximum du module de la fonction $f(z)$ pour y constant, et je suppose essentiellement que $f(z)$ est débarrassée du facteur exponentiel

$$e^{2ui\pi \frac{z}{\omega}}$$

Avant de continuer, je démontre une propriété des suites des nombres arithmétiques croissants.

10. Si ρ désigne l'exposant de convergence de la suite

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots,$$

on sait qu'à partir d'une certaine valeur entière $n \geq n_0$, on a constamment

$$r_n > n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}},$$

tandis que l'inégalité

$$r_n < n^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}}$$

est satisfaite pour une infinité de valeurs de l'entier n.

La seconde inégalité est satisfaite comme la première à partir de $n \geq n_0$ si l'ordre d'infinitude de r_n est déterminé.

La propriété que j'ai en vue est la suivante :

THÉORÈME. — *L'ensemble des nombres entiers n pour lesquels on a*

$$(1) \qquad r_n < n^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}}$$

et l'ensemble des nombres entiers n pour lesquels on a

$$(II) \qquad r_{n+1} - r_n > (n+1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} - n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}$$

admettent une infinité d'éléments communs.

Il est tout d'abord aisé de montrer que l'inégalité (II) est satisfaite pour une infinité de valeurs de n.

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi; à partir d'une certaire valeur n_0 on aura constamment

$$\begin{aligned}
r_{n_0+1} - r_{n_0} &< (n_0+1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} - n_0^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
r_n - r_{n-1} &< n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} - (n-1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}, \\
r_{n+1} - r_n &< (n+1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} - n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}},
\end{aligned}$$

d'où en additionnant membre à membre

$$r_{n+1} < (n+1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} + \text{const.} < A\,(n+1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}.$$

L'exposant de la suite r_n ne serait pas ρ.

On voit donc que l'inégalité (II) est, comme l'inégalité (1), satisfaite pour une infinité de valeurs de n. Mais rien ne prouve, *a priori*, qu'il existe une infi-

nité de valeurs de n pour lesquelles ces deux inégalités sont satisfaites *simultanément*.

Le théorème qui va être établi consiste en ce que cette circonstance se produit effectivement.

On peut écarter le cas où l'ordre d'infinitude de la suite r_n est déterminé; car alors la propriété est manifeste, l'inégalité (I) étant satisfaite constamment à partir d'une certaine valeur de n.

On peut donc supposer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles l'inégalité (I) n'est pas satisfaite. Soient

$$N_1, \quad N_2, \quad N_3, \quad \ldots, \quad N_p, \quad \ldots$$

les indices, en nombre infini, pour lesquels

$$r_{N_p} < N_p^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}}.$$

Les indices N_p+1 ne peuvent pas tous vérifier cette inégalité sans quoi, à partir de $p \geqq q$, la suite des N coïnciderait avec la suite des entiers, cas que l'on vient d'écarter.

On a le droit de supposer, quitte à supprimer certains nombres de la suite des N qu'aucun des nombres de la forme N_p+1 ne vérifie (I).

Autrement dit, chaque fois que l'on a

$$r_{N_p} < N_p^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}},$$

on a également

$$r_{N_p+1} > (N_p+1)^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}},$$

d'où

$$r_{N_p+1} - r_{N_p} > (N_p+1)^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}} - N_p^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}} > (N_p+1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} - N_p^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}.$$

Les nombres

$$N_1, \quad N_2, \quad \ldots, \quad N_p, \quad \ldots$$

considérés sont donc les indices qui vérifient simultanément les inégalités (I) et (II).

On peut encore écrire, pour ces indices

$$r_{n+1} - r_n > k\, n^{\frac{1}{\rho+1}-1},$$

k désignant une certaine constante.

11. Soient

$$a_1 a_2 \ldots a_h \ldots$$
$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots$$

les suites positive et négative associées à $f(z)$ (n° 7). J'appelle h et k les

nombres de zéros fondamentaux de ces deux suites, zéros dont la partie imaginaire est moindre en module que

$$\sqrt{r^2-\pi^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{r'_k}{r''_k} \leq \sqrt{r^2-\pi^2} < \frac{r'_{k+1}}{r''_{k+1}}.$$

Pour r donné, j'appelle

$$nr - \sum_1^n r_p$$

la plus grande des deux quantités

$$\begin{aligned} &ltr - (r'_1 + r'_2 + \ldots + r'_k), \\ &kr - (r''_1 + r''_2 + \ldots + r''_k). \end{aligned}$$

THÉORÈME. — *Pour toute fonction entière périodique, le logarithme du module maximum sur le cercle* $C(|z|=r)$ *est égal à*

$$nr - \sum_1^n r_p + k(r) r^{\rho+\varepsilon},$$

$k(r)$ *désigne une certaine fonction de* r *infiniment petite avec* $\frac{1}{r}$.

Si la fonction est à croissance régulière, ou bien si elle est d'ordre inférieur à deux, le logarithme du module maximum est équivalent à

$$nr - \sum_1^n r_p,$$

pour r *infiniment grand.*

Démonstration. — Le point P du cercle C où la fonction $f(z)$ atteint son module maximum est situé sur l'un ou l'autre des deux arcs $C'C''$ intérieurs à la bande $|x| \leq \pi$, sinon on peut trouver un point P′ dans cette bande et intérieur à C tel que $f(P)=f(P')$, et il en résulte que

$$M(r') \geq M(r) \qquad (r' = OP' < r),$$

ce qui est absurde puisque l'on sait que $M(r)$ est une fonction croissante et convexe de $\log r$.

Sur l'arc C' (y positif) $\log f(z)$ ne dépend que de $F\left(\frac{1}{u}\right)$ puisque $G(u)$ est voisin de $G(0)$; de même sur C'' (y négatif) $\log f(z)$ ne dépend que de $G(u)$.

Il est aisé d'avoir une borne inférieure de $\log M(r)$. On a vu au n° 7 que

$$\log M(f, r) > \max \text{ de } [\log M(F, r'), \log M(G, r')] + O(1),$$
$$r' = \sqrt{r^2 - \pi^2}.$$

L'inégalité de Jensen donne immédiatement, grâce à la définition des nombres h et k,

$$\log M(F, e^r) > hr - \sum_1^h r'_p + \log|F(O)|,$$

$$\log M(G, e^r) > kr - \sum_1^k r''_p + \log|G(O)|.$$

D'où, d'après les notations posées au début de ce numéro

$$\log M(r) > nr - \sum_1^n r'_p + O(1).$$

Pour avoir une borne supérieure de $\log M(r)$ remarquons qu'il suffit de supposer que le maximum du module est atteint sur C' et de ne considérer par conséquent que la suite positive. Dans le cas contraire, on remplacera la suite positive par la suite négative.

Déterminons, en plus du nombre h, le nombre entier m par les inégalités

$$(m-1)^t \leqq r < m^t \qquad \left(t = \frac{1}{\rho' + \varepsilon}\right),$$

ρ' désigne l'exposant de convergence de la suite positive.

Comme

$$r'_m > m^t,$$

pour m suffisamment grand, on a, à partir d'une certaine valeur de r

$$r'_m > r > \sqrt{r^2 - \tau^2} > r'_h,$$

c'est-à-dire

$$m > h.$$

Écrivons

$$M(r) < A \prod_{p=1}^{h} \prod_{p=h+1}^{m} \prod_{p=m+1}^{\infty} (1 + e^{r - r'_p}).$$

Et comme à partir de

$$p = h + 1,$$

$$r - r'_p < r - \sqrt{r^2 - \tau^2} < \log(r - 1)$$

(la dernière inégalité a lieu si r est suffisamment grand, ce que nous supposons), on a

$$1 + e^{r - r'_p} < e;$$

une limite supérieure du second produit est e^{m-h}.

D'autre part, une limite supérieure du logarithme du troisième produit est

$$e^r \sum_{m+1}^{\infty} e^{-r'_p}.$$

Or

$$\sum_{m+1}^{\infty} e^{-r'_p} < \int_m^{\infty} e^{-x^t}\, dx.$$

On a immédiatement une limite supérieure de l'intégrale en remarquant que, dans l'intervalle d'intégration

$$e^{-x^t} < e^{-x^t}(tx^{t-1}),$$

puisque tx^{t-1} finit par dépasser tout nombre donné, t étant positif, si m est suffisamment grand.

Le second membre de l'inégalité est la dérivée de $-xe^{-x^t}$, par suite l'intégrale est moindre que me^{-m^t}.

Le troisième produit est donc limité supérieurement par

$$e^{m+e^{-m^t}} < e^{2m}.$$

Quant au premier produit, il est inférieur à

$$e^h e^{hr - \Sigma r'_p},$$

car

$$1 + e^{r-r'_p} < 2e^{r-r'_p} \leq e\, e^{r-r'_p},$$

quand p est moindre que h.

En définitive, on a

$$\log M(r) < hr - \sum_1^h r'_p + 2m + \log A.$$

Comme

$$r^{\rho'+\varepsilon} < m \leq r^{\rho'+\varepsilon} + 1,$$

on peut écrire

$$2m + \log A = \mu(r) r^{\rho'-\varepsilon},$$

puis

$$\mu(r) r^{\rho'+\varepsilon} = \nu(r) r^{\rho'+\varepsilon'},$$

$\nu(r)$ étant une fonction infiniment petite avec $\frac{1}{r}$, ε' un autre nombre donné à l'avance, plus grand que ε.

Finalement $\log M(r)$ est inférieur au plus grand des deux nombres

$$hr - \sum_1^h r'_p + \nu(r) r^{\rho'+\varepsilon'},$$

$$kr - \sum_1^k r''_p + \nu(r) r^{\rho''+\varepsilon''}.$$

En tenant compte de la limite inférieure de $\log M(r)$, et en remarquant que ρ' et ρ'' sont aux plus égaux à ρ, on peut écrire

$$\log M(r) = nr - \sum_{1}^{n} r_p + k(r) r^{\rho+\varepsilon}.$$

$k(r)$ désigne une certaine fonction de r infiniment petite avec $\frac{1}{r}$.

Chaque terme du second membre de l'égalité précédente est moindre que $r^{1+\rho-\varepsilon}$. En rapprochant cette propriété du fait que l'exposant de convergence de la suite complète des zéros de $f(z)$ est $1+\rho$, on déduit (Chap. IV, n° 15)

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r} = 1 + \rho.$$

D'après les propriétés de la plus grande des limites, il existe des valeurs de r indéfiniment croissantes assurant l'inégalité

$$\log M(r) < r^{1+\rho+\varepsilon},$$

en même temps que

$$\log M(r) > r^{1+\rho-\varepsilon}.$$

Pour ces valeurs de r on peut écrire

$$\log M(r) \sim nr - \sum^{n} r_p,$$

car le terme $k(r) r^{\rho+\varepsilon}$ est négligeable devant $r^{1+\rho-\varepsilon}$.

On peut donc compléter le théorème par la proposition suivante :

Il existe des valeurs de r indéfiniment croissantes pour lesquelles le logarithme du module maximum est équivalent à la plus grande des deux quantités

$$hr - \sum^{h} r'_{p'} \qquad kr - \sum^{k} r''_{p''}.$$

Maintenant si la fonction est à croissance régulière, cette équivalence a lieu constamment à partir d'une certaine valeur de r.

La dernière partie du théorème annoncé résultera d'une propriété qui sera établie au numéro suivant.

Cherchons maintenant le nombre total N de zéros de module inférieur à r.

La suite primaire positive de rang p donne $\frac{1}{\pi}\sqrt{r^2 - r_p'^2}$ tranches de 2π, donc, comme le radical est supérieur à $r - r'_p$, on a

$$N > C\left(nr - \sum^{n} r_p\right).$$

Par suite, si l'on se borne aux fonctions à croissance régulière, on a

$$\log M(r) < \lambda . N.$$

C'est le résultat de M. Boutroux, et ici ce résultat est valable que ρ soit entier ou non. On sait que dans la théorie générale de M. Boutroux, quand ρ n'est pas entier ce résultat est valable; mais si ρ est entier, il faut remplacer, en général, le second membre par

$$AN\log N + \dots.$$

Considérons une fonction d'ordre 1 pour laquelle

$$r_n > e^{n^\sigma},$$

$$nr < r(\log r)^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$\log M(r) < r(\log r)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

La limite supérieure trouvée pour $\log M(r)$ est meilleure que

$$r^{1+\varepsilon}.$$

12. *Les limites de la croissance irrégulière.* — Je vais montrer que, quelle que soit la distribution des zéros, on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de r,

$$\log M(r) > Ar.$$

A étant une constante donnée, aussi grande que l'on voudra.

Je vais montrer d'abord qu'à partir d'une certaine valeur de r l'inégalité

$$hr - \sum_1^h r'_p > Br,$$

est constamment satisfaite, B, comme A, est un nombre positif donné à l'avance que l'on peut toujours supposer entier.

L'inégalité à démontrer s'écrit

$$(r - r'_{B+1}) + (r - r'_{B+2}) + \dots + (r - r'_h) > r'_1 + r'_2 + \dots + r'_B.$$

Si B est fixé, le second membre est une quantité fixe, et le premier membre est supérieur à $r - r'_{B+1}$. Cette dernière différence augmente indéfiniment avec r; l'inégalité à démontrer est vérifiée à partir d'une valeur suffisamment grande de r.

Une inégalité analogue concerne la suite négative.

Ceci posé, la limite inférieure trouvée au numéro précédent pour $\log M(r)$ montre que

$$\log M(r) > Ar.$$

Il résulte de là, comme il a été annoncé à la fin du numéro précédent, que pour les fonctions d'ordre inférieur à 2, on a constamment à partir d'une certaine valeur de r

$$\log M(r) \sim nr - \sum^n r_p,$$

quel que soit le mode de croissance de la fonction, car alors

$$k(r)\,r^{\rho+\varepsilon}$$

est négligeable devant Ar, ρ étant inférieur à 1.

13. *Le module sur une parallèle aux suites primaires.* — Je rappelle la convention faite relativement au facteur primaire sinusoïdal

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a_n - z)}{\sin\frac{1}{2}a_n}\,e^{-\frac{1}{2}i\varepsilon_n z},$$

où $\varepsilon_n = 1$ ou -1 selon que le coefficient de i dans a_n est positif ou négatif. Dans le cas où ce coefficient est nul, on peut prendre indifféremment $+1$ ou -1.

J'appelle encore suite primaire de première catégorie la suite positive, et suite de deuxième catégorie la suite négative.

Quand z décrit une parallèle à Ox, d'ordonnée y, il est clair que seules les suites d'ordonnées de même signe que y interviennent pour donner l'ordre de grandeur au module de la fonction. Ainsi, si y est positif, dans l'expression

$$f(z) = \mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{G}(u),$$

u tend vers zéro, $\mathrm{G}(u)$ tend vers 1. L'ordre de grandeur de $f(z)$ est celui de $\mathrm{F}\left(\frac{1}{u}\right)$.

Encore une remarque évidente : l'exposant de la suite

$$r_1,\quad r_2,\quad \ldots,\quad r_n,\quad \ldots,$$

est égal à ρ; des deux suites de première et deuxième catégorie, l'une au moins a un exposant de convergence égal à ρ, l'autre pouvant avoir un exposant inférieur.

Ainsi, d'un côté de Ox, la fonction se comporte comme une fonction d'ordre $1+\rho$, tandis que de l'autre côté la fonction peut se comporter comme une fonction d'ordre inférieur.

La propriété suivante va préciser ce mode de croissance :

Théorème. — *Pour toute fonction entière périodique d'ordre fini, on a*

$$\log|f(z)| = n|y| - \sum_1^n r_p + k(x,y)\,|y|^{\rho+\varepsilon},$$

pourvu que l'on exclue du plan des cercles entourant les zéros et dont le rayon tend vers zéro quand le rang augmente indéfiniment.

n désigne le nombre de suites primaires d'ordonnée inférieure à $|y|$ en valeur absolue et de même signe que y; $k(x,y)$ désigne une certaine fonction dont la

valeur absolue est inférieure à tout nombre donné à l'avance, pourvu que $|y|$ soit suffisamment grand.

On peut se borner aux suites positives et supposer y positif.

On a vu que

$$M(y) \leqq A_1 \prod_{p=1}^{\infty} (1 + e^{y - r_p}),$$

$$m(y) \geqq A_1 \prod_{1}^{\infty} |1 - e^{y - r_p}|,$$

$m(y)$ désigne le minimum du module de $f(z)$ pour y constant.

Pour évaluer une limite supérieure de $M(y)$, il suffit de reprendre la démonstration du numéro précédent où l'on remplacera r par y. Par suite

$$\log M(y) < n y - \sum_{1}^{n} r_p + \mu(y) y^{\rho+\varepsilon}.$$

Pour évaluer une limite inférieure de $m(y)$, astreignons-nous d'abord à prendre

$$y - r_n > \eta_n,$$
$$r_{n+1} - y > \eta_n,$$

avec

$$\eta_n = r_n^{-A}.$$

A désigne un nombre positif donné quelconque.

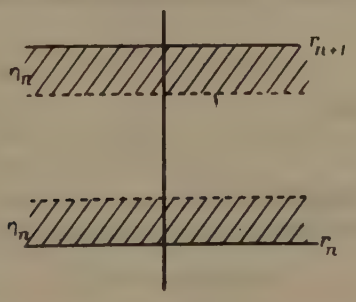


Fig. 2.

Soit encore l'entier m défini par

$$(m-1)^k \leqq y + \log 2 < m^k \qquad \left(k = \frac{1}{\rho + \varepsilon}\right).$$

On a encore, comme au n° 11, $n < m$.

Puis

$$m(y) \geqq A_1 \prod_{1}^{n} (e^{y - r_p} - 1) \prod_{n+1}^{m} \prod_{m+1}^{\infty} (1 - e^{y - r_p}).$$

Pour le troisième produit $r_p - y > \log 2$

$$e^{r_p - y} < e^{-2} < \frac{1}{2}.$$

Et comme

$$1 - u > e^{-2u},$$

dès que u reste compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, on a

$$\prod_{m+1}^{\infty}(1 - e^{y - r_p}) > e^{-2e^y \sum_{m+1}^{\infty} e^{-r_p}}$$

Mais

$$\sum_{m+1}^{\infty} e^{-r_p} < m e^{-m^2}$$

Une limite inférieure du troisième produit est

$$e^{-2me^y - m^2} \quad \text{ou} \quad e^{-2m}.$$

Une limite inférieure du second produit est

$$(1 - e^{-\eta_{1n}})^{m-n}$$

car tous les facteurs sont supérieurs à

$$1 - e^{y - r_{n+1}} > 1 - e^{-\eta_{1n}}.$$

Pour avoir une limite inférieure du premier produit, il suffit de remarquer que l'on a, puisque $p \leqq n$

$$e^{y - r_p} - 1 > (1 - e^{-\eta_{1n}})\, e^{y - r_p}.$$

Ceci revient en effet à écrire

$$y - r_p - \eta_{1n} > 0,$$

ce qui est conforme au choix de y.

Une limite inférieure du premier produit est par suite

$$(1 - e^{-\eta_{1n}})^n e^{ny - \Sigma r_p}.$$

D'où, en définitive

$$\log m(y) > ny - \Sigma r_r + m[\log(1 - e^{-\eta_{1n}}) - 2] + \log A_1.$$

Comme on a pris

$$\eta_{1n} = r_n^{-\lambda} > y^{-\lambda},$$

le coefficient de m dans l'avant-dernier terme de l'inégalité précédente est supérieur à $B \log y$ (B constante négative).

Comme

$$m < 1 + (y + \log 2)^{\rho + \varepsilon},$$

on peut écrire, en majorant le nombre ε

$$\log m(y) > ny - \sum_{1}^{n} r_p + \nu(y)\, y^{\rho+\varepsilon},$$

$\nu(y)$ étant une fonction dont la valeur absolue peut être prise aussi petite que l'on veut, pourvu que y soit suffisamment grand.

En comparant les bornes obtenues pour $\log M(y)$ et $\log m(y)$, on voit que

$$\log |f(z)| = ny - \sum_{1}^{n} r_p + u(x, y)\, y^{\rho+\varepsilon}$$

$u(x, y)$ est analogue à $\nu(y)$.

L'égalité est valable à l'extérieur des bandes de largeur infiniment petite entourant les suites primaires.

Maintenant si l'on prend z dans la bande d'ordre n, le module du facteur

$$g(a_n, z),$$

est compris entre

$$\frac{\left|2 \sin \frac{1}{2}(b_n - x)\right|}{\left|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}\right|} \quad \text{et} \quad \frac{1 + e^{2\gamma_n}}{\left|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}\right|}.$$

La contribution de ce facteur $g(a_n, z)$ dans $\log|f(z)|$ se traduit par l'adjonction d'une certaine fonction $h(x, y)$

$$\log|f(z)| = ny - \sum_{1}^{n} r_p + u(x, y)\, y^{\rho+\varepsilon} + h(x, y)$$

$h(x, y)$ étant compris entre

$$\log\left|\sin \frac{1}{2}(b_n - x)\right| \quad \text{et} \quad \log(1 + e^{2\gamma_n}),$$

à une constante près. La seconde expression est bornée.

Si l'on prend

$$\left|\frac{1}{2}(b_n - x)\right| > e^{-\gamma_n},$$

ce qui revient à exclure du plan des domaines entourant les zéros et de dimensions infiniment petites, $h(x, y)$ sera inférieur en module au module de

$$u(x, y)\, y^{\rho+\varepsilon},$$

lorsque y sera suffisamment grand. La somme des deux derniers termes de l'égalité précédente est bien de la forme

$$k(x, y)\, y^{\rho+\varepsilon},$$

Le théorème est par suite établi.

Le terme complémentaire est négligeable devant

$$n\gamma - \Sigma r_p$$

dans les deux cas suivants :

ou bien la fonction est d'ordre inférieur à 2; ou bien la fonction est à croissance régulière.

Dans l'un ou l'autre de ces deux cas, on peut écrire

$$\log |f(z)| \sim n\gamma - \Sigma r_p.$$

Il est à remarquer que si la fonction contient des suites négatives, le facteur $G(u)$ correspondant à ces suites reste borné en module pour γ positif, le théorème n'est pas altéré. De plus, on voit que ρ désigne l'exposant de la suite fondamentale positive.

14. *Application.* — Soit

$$f(z) = F\left(\frac{1}{u}\right) = A + A_1 \frac{1}{u} + \dots \qquad (u = e^{iz}).$$

Tout chemin s'éloignant indéfiniment du côté des γ négatifs est un chemin de détermination A pour $f(z)$.

Il est facile de voir dans le cas général qu'*une fonction entière périodique de genre fini ne peut admettre plus d'une valeur asymptotique*.

En effet, d'après le théorème précédent, si la suite fondamentale positive est illimitée, $\log|f(z)|$ augmente indéfiniment pour une suite de valeurs de γ indéfiniment croissantes et positives, il ne saurait avoir de chemin de détermination s'éloignant indéfiniment du côté des γ positifs.

Peut-il exister un chemin C de détermination a restant compris entre deux parallèles à Ox? (du côté des x positifs, par exemple).

Soit la droite $x = X$ (X donné). A tout nombre ε_1 il correspond un x_1 tel que $x > x_1$ entraîne

$$|f(z) - a| < \varepsilon_1$$

($z = x + iy$ désigne l'affixe d'un point du chemin C). Soit k_1 le plus petit entier positif tel que

$$X + 2k_1\pi > x_1,$$

C coupe la droite

$$x = X + 2k_1\pi$$

en M_1. Marquons sur la droite $x = X$ le point P_1 d'affixe z_1 et de même ordonnée que M_1. Alors

$$|f(z_1) - a| < \varepsilon_1.$$

A toute suite

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \dots, \quad \varepsilon_n, \quad \dots,$$

tendant vers zéro, il correspond sur la droite $x = X$ une suite de points

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots \quad P_n, \quad \ldots,$$

à ordonnées finies donc admettant un point d'accumulation P d'affixe z tel que

$$f(z) - a = 0.$$

La fonction $f(z) - a$ admet par suite un zéro à distance finie sur toute droite parallèle à Oy, ce qui est manifestement impossible.

Un tel chemin de détermination a ne saurait donc exister.

De plus, on voit que si les deux suites fondamentales positive et négative sont infinies, la fonction $f(z)$ n'admet aucune valeur asymptotique.

Remarquons encore que dans le cas où $f(z) = F\left(\frac{1}{u}\right)$ la fonction entière correspondante est d'ordre nul, tout point du plan des u correspond à un point du plan des z du côté des y positifs et tout chemin de détermination pour F correspond à un chemin de détermination pour f situé du côté des y positifs. Or, on sait, d'après un théorème classique de Wimann que les fonctions entières d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ n'admettent aucune valeur asymptotique.

CHAPITRE IV.

LA DISTRIBUTION DES VALEURS DE LA FONCTION $f(z)$.

15. J'ai dit au Chapitre précédent (n° 11) que l'ordre du produit canonique $f(z)$ était $1 + \rho$. Il n'est pas inutile de préciser ce point.

L'inégalité

$$\log M(r) < r^{1+\rho+\varepsilon},$$

satisfaite pour r suffisamment grand prouve d'abord que l'ordre de la fonction est au plus $1 + \rho$. D'autre part, l'exposant de convergence de la suite complète des zéros est $1 + \rho$. On conclut de là que l'ordre de la fonction est exactement $1 + \rho$.

Donc pour une fonction entière périodique d'ordre fini, il y a égalité entre l'ordre et l'exposant de convergence de la suite des zéros, car l'introduction d'un facteur exponentiel

$$e^{Az},$$

ne modifie pas l'ordre du produit canonique $f(z)$.

Dans l'expression

$$\log M(r) = nr - \sum_1^n r_p + k(r) r^{\rho+\varepsilon},$$

le dernier terme

$$k(r)\, r^{\rho+\varepsilon},$$

est négligeable devant les deux premiers dans tous les intervalles qu'on pourrait appeler de croissance régulière, c'est-à-dire où $\log M(r)$ reste compris entre

$$r^{\rho+\varepsilon} \quad \text{et} \quad r^{\rho+\varepsilon}.$$

Par contre, il pourrait intervenir dans les régions de croissance irrégulière. Mais même dans les régions de croissance régulière le terme

$$\Sigma r_p,$$

est loin de se comporter d'une façon simple par rapport au terme

$$nr.$$

Des exemples simples de fonctions à croissance régulière montrent que pour $\rho = 0$, le terme

$$\Sigma r_p,$$

est en général négligeable devant nr; que pour ρ fini et non nul

$$\Sigma r_p,$$

est une fraction de nr; tandis qu'il est facile de construire des fonctions à croissance tant régulière qu'irrégulière pour lesquelles le rapport

$$\frac{\Sigma r_p}{nr}$$

a effectivement pour limites d'indétermination 0 et 1.

Je me borne à étudier ce rapport, avec quelques détails, pour les fonctions à croissance régulière.

16. Soit la suite r_n telle que

$$n^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon} < r_n < n^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon},$$

à partir d'une valeur suffisamment grande de n. Soit

$$u_n = r_n n^{-\alpha},$$

où α désigne un nombre donné, positif, et *inférieur* à $\frac{1}{\rho}$.

La suite u_n n'est pas bornée supérieurement, mais elle *n'est pas en général constamment croissante*.

Marquons les points M_n de coordonnées n et u_n et construisons, comme l'indique la figure ci-dessus, une ligne brisée dont les sommets sont certains points M_n et dont la pente des côtés est positive ou nulle.

Tous les points M_n sont situés ou bien sur les côtés ou bien en dessous des côtés de la ligne.

Les indices n_i correspondant aux sommets M_{n_i} de cette ligne sont appelés les indices principaux de la suite.

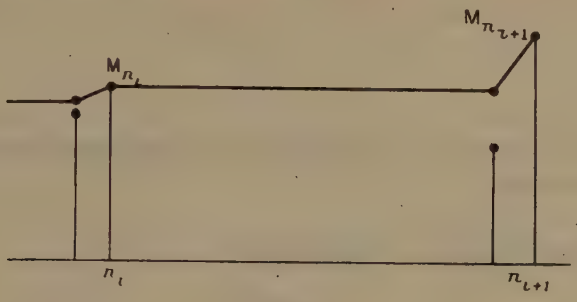


Fig. 3.

Tous les points M_n finissent par être à l'intérieur de la région délimitée par les courbes

$$y = x^{\lambda+\varepsilon} \quad \text{et} \quad y = x^{\lambda-\varepsilon} \quad \left(\lambda = \frac{1}{\rho} + \alpha\right).$$

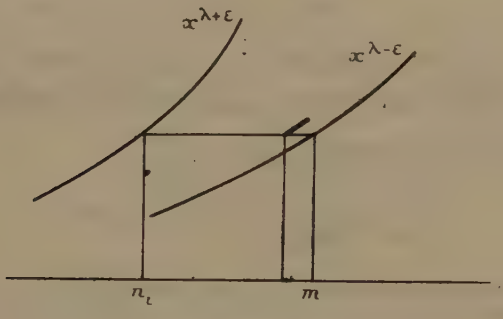


Fig. 4.

Cherchons une limite supérieure du rapport de deux indices principaux consécutifs

$$n_i \quad \text{et} \quad n_{i+1}.$$

Posons

$$n_{i+1} = n_i + p_i + 1.$$

On a

$$a_{n_i+p_i} < a_{n_i},$$

sans quoi $n_i + p_i$ serait indice principal ou bien il y aurait d'autres indices principaux entre n_i et n_{i+1}.

Si m désigne l'abscisse du point de la courbe

$$y = x^{\lambda+\varepsilon},$$

dont l'ordonnée est égale à u_{n_i} c'est-à-dire

$$n_i^{\lambda+\varepsilon} = m^{\lambda-\varepsilon},$$

on a

$$n_{i+1} \leq m+1$$

$$\frac{n^{i+1}}{n_i} \leq \frac{m+1}{n_i} \leq \frac{1+n_i^{\lambda+\varepsilon'}}{n_i},$$

$$\varepsilon' = \frac{2\varepsilon}{\lambda-\varepsilon},$$

ε' comme ε est un nombre très petit, inférieur à tout nombre donné à l'avance, pourvu que λ soit fixé.

Limite supérieure de $\sum_1^n r_p$. — Désignons par

$$y = x^{\psi(x)},$$

la fonction qui représente la ligne brisée précédente; c'est une fonction non décroissante, et l'on a

$$u_n \leq n^{\psi(n)},$$

l'égalité est assurée pour une infinité d'indices (les indices principaux) et

$$\lambda - \varepsilon < \psi(x) < \lambda + \varepsilon.$$

La fonction $\psi(x)$ continue tend donc vers λ quand x augmente indéfiniment.

La dérivée $\frac{dy}{dx}$ présente une infinité dénombrable de points de discontinuité de première espèce, il en est donc de même de $\frac{d\psi}{dx}$;

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{\log x}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} - \frac{\psi(x)}{x}\right).$$

D'autre part, la non-décroissance de y se traduit par

$$-\psi'(x)\, x \log x \leq \psi(x);$$

on a

$$\sum_1^n r_p \leq \int^n x^{\psi(x)+\alpha}\, dx + n^{\psi(n)+\alpha}.$$

Une intégration par parties donne

$$\int^n x^{\psi+\alpha}\, dx + \int^n (\psi+\alpha)\, x^{\psi+\alpha}\, dx = n^{\psi(n)+\alpha+1} - \int^n x^{\psi+\alpha+1}\psi' \log x\, dx.$$

La seconde intégrale s'écrit

$$\int^n (\psi+\alpha)\, x^{\psi+\alpha}\, dx = \left(\frac{1}{\rho}+\omega\right)\int^n x^{\psi+\alpha}\, dx,$$

ω étant une fonction de n infiniment petite avec $\frac{1}{n}$.

Le premier membre de l'égalité est égale à

$$\left(1+\frac{1}{\rho}+\omega\right)\int^{n} x^{\psi+\alpha}\,dx;$$

puis

$$\int^{n} x^{\psi-\alpha}(-x\psi'\log x)\,dx<\int^{n} x^{\psi+\alpha}\psi\,dx<\left(\frac{1}{\rho}-\alpha+\varepsilon\right)\int^{n} x^{\psi+\alpha}\,dx;$$

d'où finalement

$$(1+\alpha+\omega_1)\int^{n} x^{\psi+\alpha}\,dx<n^{\psi(n)+\alpha+1}.$$

Et comme

$$n^{\psi(n)+\alpha+1}$$

est infiniment grand par rapport à $n^{\psi(n)+\alpha}$ on peut écrire

$$\sum_{1}^{n} r_p<\frac{1+\varepsilon'}{1+\alpha}\,n^{\psi(n)+\alpha+1}.$$

Comme α peut être choisi aussi voisin de $\frac{1}{\rho}$ que l'on veut, on peut remplacer, dans l'expression précédente,

$$\frac{1+\varepsilon'}{1+\alpha} \quad \text{par} \quad \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{\rho}}.$$

Et

$$\frac{\Sigma r_p}{nr}\leqq\frac{\Sigma r_p}{nr_n}<\frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{\rho}}\,\frac{n^{\psi(n)}}{u_n}.$$

Pour un indice principal $n=n_i$ on a $u_n=n^{\psi(n)}$. Pour un indice $n=n_i+q$ tel que n_i soit principal et $\frac{q}{n_i}$ infiniment petit, par exemple $q\leqq n_i^{1-\varepsilon_1}$, on a, puisque $r_{n_i+q}\geqq r_{n_i}$,

$$(n_i+q)^{\alpha}\,u_{n_i+q}\geqq n_i^{\alpha}\,u_{n_i},$$

$$\frac{u^{n_i}}{u_{n_i+q}}=\frac{n_i^{\psi(n_i)}}{u_{n_i+q}}=\frac{(n_i+q)^{\psi(n_i+q)}}{u_{n_i+q}}\leqq\left(\frac{n_i+q}{n_i}\right)^{\alpha}.$$

D'après le choix de q la dernière fraction tend vers 1 quand n_i augmente indéfiniment.

On a donc, pour les indices tels que n_i ou n_i+q,

$$\frac{\sum_{1}^{n} r_p}{nr}<\frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{\rho}}.$$

Considérons maintenant deux indices principaux consécutifs n_i et n_{i+1}; on a vu que

$$n_i < n_{i+1} < 1 + n_i^{1+\varepsilon'}$$

De deux choses l'une, ou bien

$$n_i < n_{i+1} < n_i + n_i^{1-\varepsilon_1},$$

et tous les indices entre n_i et n_{i+1} satisfont à l'inégalité (1), ou bien

$$n_i + n_i^{1-\varepsilon_1} < n_{i+1} < n_i^{1+\varepsilon'}$$

et le rapport $\frac{\Psi^n}{u_n}$ pour les indices n supérieurs à $n_i + n_i^{1-\varepsilon_1}$ n'est pas nécessairement voisin de 1. Le raisonnement employé ne montre pas que l'inégalité (1) est satisfaite pour de tels indices.

Si donc, le rapport de deux indices principaux consécutifs n'est pas infiniment voisin de 1, il pourrait exister, *a priori*, des indices intermédiaires pour lesquels on ne peut rien dire du rapport $\frac{\Sigma r_p}{nr}$ sinon qu'il est inférieur à 1.

Il en est ainsi, s'il existe, quelque grand que soit n, une racine multiple d'ordre q, de rang n tel que q soit très grand par rapport à n.

On peut cependant chercher un ordre de grandeur des intervalles de r pour lesquels l'inégalité (1) est satisfaite.

Soit r une valeur telle que l'indice n correspondant soit principal; $r + \Delta r$ la valeur correspondant à l'indice immédiatement inférieur à $n + n^{1-\varepsilon_1}$. Dans tout l'intervalle $r + \Delta r$ l'inégalité (1) est satisfaite. Comme

$$r^{\rho-\varepsilon} < n < r^{\rho+\varepsilon},$$
$$(r + \Delta r)^{\rho-\varepsilon} < n + n^{1-\varepsilon_1} < (r + \Delta r)^{\rho-\varepsilon},$$

Δr est de l'ordre de $r^{1-\varepsilon'}$.

Ainsi, si r correspond à un indice principal, l'inégalité (1) est satisfaite dans tout un intervalle d'épaisseur Δr infiniment grande avec r.

En résumé, pour les fonctions à croissance régulière, il existe une infinité de couronnes r, $r + \Delta r$ indéfiniment croissantes et d'épaisseur infiniment grande dans lesquelles on a

$$\log M(r) = A n r,$$

A étant une certaine fonction dont la valeur est comprise entre

$$\frac{1 - \varepsilon''}{1 + \rho} \quad \text{et} \quad 1.$$

De plus, l'intervalle entre deux couronnes consécutives (distance des circonférences intérieures) est moindre que $r^{\rho+\varepsilon_2} - r$, puisque si n est indice principal, l'indice principal suivant est moindre que $n^{1-\varepsilon'}$, ε_2 désignant un certain nombre qui peut être choisi à l'avance pourvu que l'on ait fixé λ c'est-à-dire α.

En d'autres termes, si r est une valeur qui correspond à un indice principal, la valeur qui correspond à l'indice principal suivant est moindre que $r^{1+\varepsilon_n}$.

Remarque. — Dans le cas particulier où il existe un nombre α compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ tel que la suite

$$u_n = r_n n^{-\alpha},$$

soit constamment croissante à partir d'un certain rang n, tous les indices sont principaux à partir de ce rang et l'inégalité

$$\frac{\Sigma r_p}{n r} < \frac{1+\varepsilon}{1+\alpha},$$

est constamment satisfaite à partir d'une valeur suffisamment grande de n.

Cas des fonctions d'ordre 1 *à croissance régulière.* — Tout ce qui a été dit précédemment subsiste sauf qu'il faut remplacer, dans l'inégalité (1), $\frac{1}{2}$ par α, où α désigne un nombre positif, fixe, qui peut être choisi aussi grand que l'on voudra.

Autrement dit, dans les couronnes déjà mentionnées on a

$$\frac{\Sigma r_p}{n r} < \eta_1,$$

η_1 désigne un nombre donné, aussi petit que l'on veut.

17. *Hypothèse particulière.* — Si l'on suppose que le rapport

$$\Phi(n) = \frac{\log r_n}{\log n},$$

finit par être constamment croissant, on a

$$\int^n x^{\Phi(x)} dx < \frac{1}{1+\frac{1}{2}-\varepsilon} n^{\Phi(n)+1},$$

car la dérivée du second membre s'écrit

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}-\varepsilon} n^{\Phi(n)+1} \left| \frac{\Phi(n)+1}{n} + \Phi'(n) \log n \right|$$

et l'inégalité à assurer s'écrira encore

$$\left(1+\frac{1}{2}-\varepsilon\right) n^{\Phi(n)} < [\Phi(n)+1] n^{\Phi(n)} + n^{\Phi(n)+1} \Phi'(n) \log n,$$

ou

$$\frac{1}{2} - \varepsilon - \Phi(n) < n \Phi'(n) \log \eta_1,$$

ce qui a effectivement lieu, car le premier membre finit par être négatif et le second membre est positif.

Par suite l'inégalité (1) est satisfaite pour toutes les valeurs de r au delà d'une certaine limite.

Et dans le cas encore plus particulier des fonctions d'ordre 1 le rapport

$$\frac{\Sigma r_p}{nr},$$

tend vers o lorsque r augmente indéfiniment.

Autrement dit, pour de telles fonctions $\log M(r)$ est équivalent à nr.

18. *Étude d'un exemple.* — Voici un exemple de fonction à croissance irrégulière.

Considérons, avec M. Borel, la suite des entiers définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &n_1 = 1, \\ &e^{n_1} \leq n_2 - 1 < e^{n_1} + 1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &e^{n_{p-1}} \leq n_p - 1 < e^{n_{p-1}} + 1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Soit la ligne brisée joignant les points d'abscisses n_i situés sur la courbe exponentielle

$$y = e^x,$$

aux points d'abscisses $n_i - 1$ situés sur la droite $y = x$.

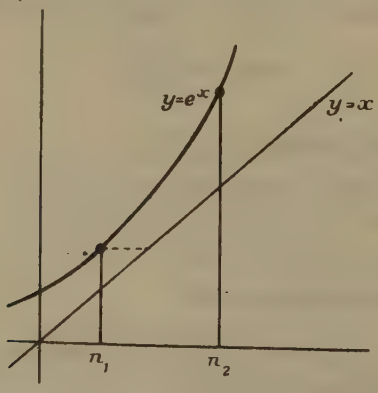


Fig. 5.

Définissons la suite r_n telle que les points de coordonnées n, r_n sont tous situés sur la ligne brisée précédente. La suite r_n est non décroissante et admet pour exposant de convergence l'unité.

Envisageons une fonction entière périodique, d'ordre 2, de période 2π, et dont la suite fondamentale correspond à la suite r_n qui vient d'être définie.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$n_{p-1}=a; \qquad n_p=b; \qquad n_{p+1}=c;$$
$$n=b+\mathrm{N}<c.$$

On voit facilement que

$$\sum_1^n r_p=\mathrm{N}e^b(1+\varepsilon).$$

Le rapport

$$\frac{\Sigma r_p}{nr_p}$$

est alors équivalent à

$$\frac{\mathrm{N}}{b+\mathrm{N}}.$$

Comme N peut varier de 0 à $c-b$, c'est-à-dire peut être infiniment grand par rapport à b, on voit que les limites d'intermination du rapport $\frac{\Sigma r_p}{nr_n}$, par suite celles de $\frac{\Sigma r_p}{nr}$ sont effectivement 0 et 1.

Si l'on prend

$$b+\mathrm{N}<c-1,$$

le signe égalité étant exclu, on a

$$r\sim r_b\sim e^b; \quad n\sim(\log r-\mathrm{N}),$$

et $nr-\Sigma r_p$ est au plus de l'ordre de $r\log r$. Dans l'expression de $\log \mathrm{M}(r)$ du n° 11 le terme complémentaire $k(r)r^{\rho+\varepsilon}$ peut contribuer à donner l'ordre de grandeur au module. Quoi qu'il en soit, la fonction se comporte, dans ces intervalles, comme une fonction d'ordre 1.

Mais si l'on prend

$$n=b+\mathrm{N}=c-1,$$

on a

$$n\sim c\sim e^b.$$

Posons

$$r=e^b+\mathrm{R}<e^c.$$

Pour des valeurs de r infiniment voisines de e^b ou e^c on voit facilement que $nr-\Sigma r_p$ est encore de l'ordre de $r\log r$.

Mais pour des valeurs de r telles que

$$\mathrm{R}=(e^b)^\lambda\sim n^\lambda,$$

λ désignant un nombre supérieur à 1, on a

$$nr\sim n^{1+\lambda},$$
$$\Sigma r_p\sim \mathrm{N}e^b\sim(e^b)^2\sim n^2.$$

Donc le terme Σr_p est négligeable devant $n^{1+\Lambda}$; par suite

$$nr - \Sigma r_p \sim n^{1+\Lambda} \sim r^{\frac{1+\Lambda}{\Lambda}}$$

Le logarithme du module maximum se comporte alors comme une fonction d'ordre $\frac{(1+\Lambda)}{\Lambda}$.

L'inégalité

$$\log M(r) > r^{\lambda-\varepsilon}$$

est satisfaite toutes les fois que A est compris entre

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

19. *La distribution des valeurs de la fonction.* — D'après ce qui a été dit au Chapitre précédent, si une fonction entière périodique n'est pas à suite fondamentale limitée, $\log M(r)$ ne saurait être égal à kr où k désigne une fonction bornée de r; puisque si ρ est inférieur à 1 on a constamment $\log M(r) > A.r$ à partir d'une valeur suffisamment grande de r, et si ρ n'est pas nul il existe une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes assurant l'inégalité

$$\log M(r) > r^{1-\rho-\varepsilon}.$$

Pour les fonctions à suite fondamentale limitée, au contraire, $\log M(r)$ reste équivalent à $n_0 r$ à partir d'une valeur suffisamment grande de r, n_0 désignant le nombre de suites primaires de la fonction d'un certain signe.

Par suite, une égalité de la forme

$$\log M(r) = k.r,$$

où k désigne une fonction bornée de r caractérise les fonctions à suite fondamentale limitée.

Si l'on considère maintenant la fonction

$$f(z) - x,$$

où x est une constante donnée, l'ordre de cette fonction est naturellement égal à celui de $f(z)$. Il en résulte que l'exposant de convergence de la suite des zéros de cette fonction est $1+\rho$. Dans le cas où ρ est nul la suite fondamentale ne peut être limitée sans quoi le logarithme du module maximum de $f(z) - x$ par suite de $f(z)$ est équivalent à Ar (cas sans intérêt).

On déduit de là le théorème suivant :

Théorème. — *Pour toute fonction entière périodique ne se réduisant pas à une combinaison finie d'exponentielles, il ne saurait y avoir de valeurs exceptionnelles finies au sens de Picard.*

Application. — Supposons que $f(z)$ ne comporte que des suites négatives. Elle s'écrit $f(z) = G(u)$, $G(u)$ désigne une fonction entière en u d'ordre o et

de genre o. On sait qu'une telle fonction ne peut admettre de valeurs exceptionnelles au sens de Picard. L'application du théorème précédent nous montre qu'en plus si R_n désigne le module du $n^{ième}$ zéro de la fonction $G(u)$ et si R'_n désigne le module dn $n^{ième}$ zéro de la fonction $G(u) - c$ (où c désigne une constante arbitraire), la série de terme général

$$(\log R'_n)^{-\rho-\varepsilon} \qquad \text{comme} \quad (\log R_n)^{-\rho-\varepsilon}$$

est convergente.

Autrement dit, non seulement on peut affirmer que l'exposant de convergence de la suite des zéros de $G(u) - c$ est nulle, mais que l'exposant de convergence de la suite de leurs logarithmes est ρ, c'est-à-dire le même que celui de la suite des logarithmes des zéros de $G(u)$.

Nature des suites primaires de $f(z) - x$. Cas particulier. — Supposons d'abord que $f(z)$ n'a que des suites négatives.

$$f(z) = G(u).$$

A chaque zéro de $f(z) - x$ correspond un zéro de $G(u) - c$; à une suite positive de $f(z) - x$ correspond un zéro de $G(u) - c$ de module inférieur à 1.

Comme $G(u)$ ne peut admettre qu'un nombre fini de zéros de module inférieur à 1, $f(z) - x$ n'admet qu'un nombre fini de suites primaires négatives.

Cas général. — On a vu au n° 13 que

$$\log|f(z)| = n|y| - \Sigma r_p + k(x, y)\,|y|^{\rho-\varepsilon},$$

égalité valable en dehors des domaines entourant les zéros et de dimensions infiniment petites quand le rang de la suite primaire augmente indéfiniment.

L'expression ρ qui intervient dans cette égalité désigne l'exposant de la suite des zéros fondamentaux situés du même côté que z par rapport à l'axe Ox.

Ainsi, du point de vue de la croissance du module de la fonction, tout se passe comme si l'on a affaire à une fonction d'ordre $1 + \rho$.

Cet ordre peut être inférieur à l'ordre réel de la fonction.

Convenons de dire que dans la région envisagée, la fonction est d'ordre relatif $1 + \rho$. Il est clair que des deux ordres relatifs de chaque côté de Ox, l'un au moins est égal à l'ordre réel de la fonction.

Cela dit, si l'on considère les deux fonctions

$$f(z) \quad \text{et} \quad f(z) - x,$$

de chaque côté de Ox ces deux fonctions ont même ordre relatif, car leurs modules sont équivalents sur une parallèle à Ox, en dehors des domaines d'exclusion entourant leurs zéros.

Autrement dit, de chaque côté de Ox, les suites primaires de ces deux fonctions ont même exposant de convergence relatif.

Pour un produit canonique de facteurs primaires sinusoïdaux, on a naturellement, du côté des y positifs,

$$\log M(y) \sim h_0 y,$$

h_0 désigne le nombre de suites primaires positives.

En écartant le cas où $f(z)$ est une fonction linéaire de l'exponentielle

$$e^{\alpha z},$$

(où $f(z) - x$ peut ne pas admettre de zéros) on voit que la fonction

$$f(z) - x,$$

admet, quel que soit x, le même nombre de suites primaires positives que $f(z)$ puisque les logarithmes du module maximum de ces deux fonctions sur une parallèle à Ox sont équivalents.

De même ces deux fonctions admettent le même nombre de suites primaires négatives.

20. *Les domaines de régularité d'une fonction à croissance régulière.* — On a vu plus haut qu'il existe une infinité de couronnes de centre O, de rayon et d'épaisseur indéfiniment croissants dans lesquelles on a

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} nr < \log M(r) < nr.$$

J'appellerai ces couronnes les domaines de régularité de la fonction. Dans le cas particulier où

$$\frac{\log r_n}{\log n},$$

finit par être constamment croissant, le domaine de régularité couvre tout le plan, à l'extérieur d'un certain cercle de centre O.

Je me propose de montrer la propriété suivante :

Théorème. — *Étant données deux fonctions entières périodiques à croissance régulière, $f(z)$ et $F(z)$, il existe une infinité de domaines de régularité communs de rayon indéfiniment croissant.*

Étant donné ε quelconque, on peut trouver un domaine de régularité (d_1) de rayon intérieur r pour $f(z)$ tel que les rayons intérieurs des domaines de régularité suivants (d_2) (d_3) sont inférieurs respectivement à $r^{1+\varepsilon}$ et $r^{(1+\varepsilon)^2}$.

Si l'on suppose qu'il existe, entre (d_1) et (d_2), un domaine de régularité (D_1) pour $F(z)$ n'empiétant pas sur (d_1) (d_2), je dis que le domaine suivant pour $F(z)$, soit (D_2), empiétera sur (d_2) ou (d_3).

En effet, si R désigne le rayon intérieur de (D_1), celui de (D_2) est moindre que $R^{1+\varepsilon'}$ $(R > r)$. On peut choisir ε' pour que $R^{1+\varepsilon'}$ soit inférieur à $r^{1+\varepsilon}$ ou supérieur à $r^{(1+\varepsilon)^2}$, ce qui signifie que (D_2) empiétera sur (d_2) ou (d_3).

Ainsi si un domaine (D_1) n'empiète sur aucun domaine de $f(z)$, le domaine suivant (D_2) empiétera sur un domaine de $f(z)$. Les deux fonctions admettent donc bien une infinité de domaines de régularité communs, aussi loin de l'origine que l'on voudra.

Application. — Soient

$$f(z) \quad \text{et} \quad f_1(z) = f(z) - x.$$

Dans l'un de leurs domaines de régularité communs, on a

$$\log M(r) = A(r)\, nr,$$
$$\log M_1(r) = A_1(r)\, n_1 r,$$

$A(r)$ et $A_1(r)$ sont deux fonctions de r comprises entre

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\rho} \quad \text{et} \quad 1.$$

Comme $\log M(r)$ est équivalent à $\log M_1(r)$, le rapport $\frac{n_1}{n}$ est équivalent à $\frac{A_1}{A}$, c'est-à-dire reste compris entre

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\rho} \quad \text{et} \quad \frac{1+\rho}{1-\varepsilon}.$$

Donc si l'on se borne aux fonctions $f(z)$ qui admettent par exemple une suite limitée d'un certain côté de Ox, le rapport des nombres de zéros des deux fonctions

$$f(z) \quad \text{et} \quad f(z) - x,$$

de module inférieur à r, lorsque z décrit un cercle C situé dans l'un des domaines de régularité communs, est compris entre deux valeurs finies et non nulles, valeurs d'autant plus voisines l'une de l'autre que ρ est plus petit.

En d'autres termes, le rapport des zéros de même rang n de ces deux fonctions est fini et non infiniment petit pour une infinité d'indices n.

Et si la fonction $f(z)$ est d'ordre 1 le rapport des zéros de même rang n est infiniment voisin de 1 pour une infinité de valeurs de l'entier n.

CHAPITRE V.

CERCLES DE REMPLISSAGE ET DIRECTIONS DE BOREL DES FONCTIONS ENTIÈRES PÉRIODIQUES.

21. Le point de vue élémentaire adopté dans les quatre premiers chapitres a suffi pour préciser certaines particularités des fonctions entières périodiques, pour lesquelles la distribution spéciale des zéros permet, en quelque sorte de prévoir certains résultats.

La transformation

$$u = e^{-iz},$$

qui fait correspondre à toute fonction entière périodique à suite fondamentale positive une fonction entière d'ordre nul peut servir à deux fins.

Les propriétés démontrées dans les chapitres précédents permettent de retrouver quelques résultats simples des fonctions entières d'ordre nul.

Il est vrai que cette méthode laisse en dehors les fonctions entières d'ordre nul pour lesquelles la suite des logarithmes des modules des zéros n'a pas un exposant de convergence fini.

En se basant sur les propriétés classiques des fonctions entières d'ordre nul, il est possible d'avoir certaines propriétés particulières des fonctions entières périodiques.

Notamment, en ce qui concerne la distribution des zéros dans une direction arbitraire, ainsi que l'existence des cercles de remplissage et l'ordre de ces cercles, les propriétés connues des fonctions entières d'ordre nul ont immédiatement leur équivalent ici.

Cependant, il suffit d'appliquer quelques résultats du Chapitre III, et de suivre la méthode employée par MM. Milloux et Valiron dans le problème des directions de Borel des fonctions méromorphes, pour arriver à résoudre directement le problème posé sur les fonctions entières périodiques avec une grande précision (1).

22. Reprenons le résultat du n° 13 :

On a, pour toutes les fonctions entières périodiques,

$$\log |f(z)| = n |y| - \sum_{1}^{n} r_p + k(x, y) |y|^{\rho+\varepsilon},$$

à l'extérieur des cercles entourant les zéros et dont les rayons tendent vers o lorsque le rang augmente indéfiniment.

Pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de $|y|$ on a

$$|y|^{1+\rho-\varepsilon} < n|y| - \Sigma r_p < |y|^{1+\rho+\varepsilon}.$$

Pour ces valeurs, le rapport

$$\frac{k(x,y)|y|^{\rho+\varepsilon}}{|y|^{1+\rho-\varepsilon}},$$

(1) Valiron, *Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul et en particulier les fonctions à correspondance régulière* (*Thèse*, Paris, 1914 et *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1913); Valiron, *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre nul* (*Bull. Sc. Math.*, t. LIX, 1935, 1re partie); Milloux, *Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel* (*Acta Math.*, t. 52, 1929). Dans tout ce chapitre, les renvois à ces écrits sont indiqués respectivement par : (V. T.), (V. B.) et (M. A.).

est infiniment petit, donc

$$\log|f(z)| \sim n|y| - \Sigma r_p,$$

et l'on obtient, pour la fonction entière d'ordre nul correspondant à $f(z)$ le théorème suivant :

Il existe une suite de valeurs indéfiniment croissantes de R *pour lesquelles le logarithme du module de la fonction est équivalent à*

$$\log \frac{R^n}{R_1 R_2 \dots R_n}.$$

On reconnaît là l'énoncé du théorème de Littlewood (¹) valable d'ailleurs pour toutes les fonctions entières d'ordre nul.

G(u) désignant la fonction entière d'ordre nul correspondant à $f(z)$, M(R) son module maximum pour $|u| = R$, on a

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log M(R)}{(\log R)^2} = \begin{cases} \infty & \text{si } \rho > 1, \\ 0 & \text{si } \rho < 1. \end{cases}$$

Pour $\rho = 1$, on ne peut rien dire de cette limite sans faire d'autres hypothèses sur la croissance de la suite $\log R_p$.

Et si l'on remarque que pour ρ inférieur à 1, on a constamment pour y positif et suffisamment grand :

$$ny - \Sigma r_p > A y,$$

A désignant un nombre positif donné (n° 12). Donc

$$\log|f(z)| \sim ny - \Sigma r_p \sim \log M(y),$$

et l'on obtient la proposition suivante :

Pour toute fonction entière d'ordre nul telle que la suite $\log R_p$ *a un exposant de convergence inférieur à* 1, ce qui exige

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log M(R)}{(\log R)^2} = 0,$$

le logarithme du module de la fonction est équivalent au logarithme du module maximum pour R *suffisamment grand, à condition d'exclure du plan, autour de chaque zéro de rang n, un domaine vu de l'origine sous un angle infiniment petit avec* $\frac{1}{n}$ *et dont la plus grande dimension est de l'ordre de* $\varepsilon(n) R_n$, $\varepsilon(n)$ *tendant vers* 0 *avec* $\frac{1}{n}$.

(¹) Littlewood, *On the asymptotic approximation of integral functions of zero order* (*Proc. Lon. Math. Soc.*, t. V).

On peut même préciser, d'après l'analyse du n° 13, que l'angle sous lequel on voit, de l'origine, ces domaines est de l'ordre de

$$e^{-(\log R_n)^{\frac{1}{2}}},$$

et que la plus grande de ses dimensions est inférieure à

$$(\log R_n)^{-A} R_n \qquad (A \text{ positif donné}).$$

Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème de M. Valiron concernant les fonctions d'ordre nul pour lesquelles

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log M(R)}{(\log R)^2} < \infty \quad (^1).$$

Et si l'on suppose maintenant que la fonction $f(z)$, d'ordre quelconque, est à croissance régulière, on a encore

$$\log|f(z)| \sim \log M(r),$$

à l'extérieur des mêmes domaines d'exclusion. Le théorème précédent s'applique encore à ces fonctions, et celui de M. Valiron s'applique à leurs transformées, qui sont à croissance régulière. Et pour ces dernières, aucune condition n'est imposée à

$$\frac{\log M(R)}{(\log R)^2}.$$

23. *Directions de Borel.* — Je rappelle qu'étant données une fonction entière et une direction d du plan issue de l'origine, cette direction est appelée direction de Borel de la fonction si dans tout angle (d) de sommet l'origine d'ouverture arbitrairement petite et de bissectrice d le théorème de M. Borel reste vrai, c'est-à-dire

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log n}{\log r} = \text{l'ordre de la fonction.}$$

n désigne le nombre de zéros de la fonction $f(z) - a$ de module inférieur à r et contenus dans l'angle (d).

On a la proposition suivante :

Étant donnée une fonction entière périodique ne se réduisant pas à une combinaison finie d'exponentielles, toute droite Δ issue de l'origine contient une direc- de Borel de la fonction.

Il suffit de montrer que le théorème de Borel reste vrai dans l'ensemble des deux angles (Δ) de bissectrice Δ et d'ouverture 2ε arbitrairement petite.

La période de la fonction est encore supposée égale à 2π.

---

(1) (V. T.).

Soit α l'angle que fait Δ avec $O.x$. Toute suite primaire d'ordonnée $r_n < r\sin\alpha$ comporte $A r_n$ zéros situés dans (Δ), A désigne une certaine constante qu'il est inutile de préciser; ces zéros sont situés à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon r.

Le nombre total de zéros de la fonction intérieurs à (Δ) et de module inférieur à r est par suite :

$$N = A \sum_{1}^{n} r_p,$$

$$(r_n < r\sin\alpha < r_{n+1}).$$

On a, par définition,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log r_n}{\log n} = \frac{1}{\rho}.$$

Je dis que l'on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \sum_{1}^{n} r_p}{\log n} = 1 + \frac{1}{\rho}.$$

En effet, on sait qu'il existe une infinité d'indices

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots,$$

assurant l'inégalité

$$r_N > N^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}.$$

Les points d'accumulation de la suite $N_{k-1} : N_k$ ($k = 2, 3, \ldots$) peuvent être arbitrairement distribués sur le segment 0, 1.

A. Supposons que ce rapport ne tend pas vers 0. Il existe donc une infinité d'indices k assurant les inégalités

$$0 < p < \frac{N_{k-1}}{N_k} < q < 1.$$

(On peut ramener à ce cas celui où le rapport tend vers 1, par suppression de certains nombres de la suite N.)

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$N_{k-1} = n', \qquad N = n.$$

On a

$$\Sigma r_p > (n - n') n'^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon} > (1 - q) p^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon} n^{1+\frac{1}{\rho}-\varepsilon}$$

Par suite

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \Sigma r_p}{\log n} = 1 + \frac{1}{\rho}.$$

B. Supposons que le rapport d'un indice N au suivant tend vers o, et prenons

$$n = N_{k-1} + N' < N_k,$$

On a

$$\Sigma r_p > N' N_{k-1}^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}.$$

On peut prendre N′ infiniment grand par rapport à N_{k-1}. Le second membre de l'inégalité sera supérieur à

$$N'^{1+\frac{1}{\rho}-\varepsilon-\varepsilon'} \quad \text{si} \quad N' < N_{k-1}^{\varepsilon''} \qquad \left(\varepsilon'' = \frac{\varepsilon'}{\frac{1}{\rho}-\varepsilon-\varepsilon'}\right).$$

Il suffira de prendre N′ inférieur au plus petit des deux nombres

$$N_{k-1}^{1-\varepsilon''} \quad \text{et} \quad N_k,$$

ce qui est possible. Alors n sera équivalent à N′, et pour ces indices n la somme Σr_p sera supérieure à

$$B\, n^{1+\frac{1}{\rho}-\varepsilon-\varepsilon'} \qquad (B = \text{const.}).$$

Il en résulte que, dans tous les cas

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \Sigma r_p}{\log n} = 1 + \frac{1}{\rho}.$$

Ceci posé, on a, d'après les propriétés de l'ordre,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log n}{\log r} = \rho;$$

d'où

$$\overline{\lim} \frac{\log N}{\log r} = \overline{\lim} \frac{\log \Sigma r_p}{\log r} \leq \overline{\lim} \frac{\log r_p}{\log n} \overline{\lim} \frac{\log n}{\log r} = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)\rho = 1 + \rho.$$

D'autre part, si l'on se borne aux valeurs de r équivalentes à r_n, dans le rapport précédent on peut remplacer

$$\log r \quad \text{par} \quad \log r_n.$$

Et pour la suite des indices n satisfaisant à

$$r_n > n^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon},$$

$\frac{\log n}{\log r_n}$ tend vers la limite ρ. Par suite, on a

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log N}{\log r} = 1 + \rho.$$

La proposition est donc démontrée.

Applications. — La transformation $u = e^{iz}$ fait correspondre à toute droite issue de l'origine une spirale logarithmique de point asymptote O permet de retrouver la propriété connue suivante relative aux fonctions d'ordre nul correspondant à $f(z)$:

Il existe une famille de courbes de Borel constituées par des spirales logarithmiques admettant l'origine comme point asymptote.

La propriété qui vient d'être démontrée est intuitive si l'on remarque que tout angle formé par deux droites issues de l'origine et d'ouverture arbitrairement petites est un domaine de remplissage pour la fonction. Si l'on considère un angle arithmétique, formé par deux demi-droites, il peut ne contenir qu'un nombre fini de zéros de la fonction (s'il est situé du côté de Ox où la fonction n'admet qu'un nombre fini de suites primaires.)

Remarque. – La démonstration de la propriété précédente est valable pour toutes les fonctions $f(z) - Z$ quelle que soit la valeur de Z, puisque l'exposant des zéros de toutes ces fonctions est $1 + \rho$.

Ceci montre que *les fonctions entières périodiques d'ordre fini n'admettent pas de valeurs exceptionnelles finies au sens de M. Borel.*

Le fait que toute droite du plan contient une direction de Borel pour une fonction entière périodique peut être considéré comme une conséquence immédiate d'une propriété classique, savoir :

Toute fonction méromorphe d'ordre fini positif possède au moins une direction de Borel.

En effet, soit (D) la direction de Borel fournie par ce théorème, pour notre fonction qui est d'ordre $1 + \rho$. (Δ) désigne une direction quelconque du plan. A l'angle (Δ) d'ouverture arbitrairement petite, on fait correspondre un angle (D) tel que tout point de (D) correspond à un point de (Δ) où la fonction prend la même valeur. Il est alors clair que si le théorème de Borel est vrai dans (D) il est vrai dans (Δ).

24. Supposons, sans d'ailleurs restreindre la généralité, que la fonction entière périodique ne contient que des suites positives.

Soit T(R, G) la caractéristique de Nevanlinna de la fonction G(u) correspondant à $f(z)$.

Quand u décrit une fois le cercle $|u| = R$, z décrit un segment de longueur 2π parallèle aux suites primaires.

On a immédiatement, avec les notations déjà employées,

$$\log m(y) < T(R, G) < \log M(y).$$

D'après les résultats du n° 13, on peut écrire

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log T(R, G)}{\log\log R} = 1 + \rho,$$

et

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{T(R, G)}{(\log R)^2} = \begin{cases} \infty & \text{si } \rho > 1, \\ 0 & \text{si } \rho < 1. \end{cases}$$

Si l'on introduit la moyenne logarithmique de Jensen

$$\int_0^R \frac{n(x, G) - n(0, G)}{x} dx + n(0, G)\log R = N(R, G) = n\log R - \Sigma \log R_p,$$

où $n(x, G)$ désigne le nombre de zéros de $G(u)$ de module inférieur à x.

On voit que

$$T(R, G - c) = N(R, G - c) + k(R).(\log R)^{\rho+\varepsilon},$$

$k(R)$ désigne une fonction bornée.

On retrouve par suite une propriété connue :

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{N(R, G - c)}{T(R, G - c)} = 1,$$

et ici la propriété est vraie pour toute valeur finie de c, sans aucune valeur exceptionnelle.

Revenons à notre fonction périodique $f(z)$.

Toute bande de largeur égale à une période et perpendiculaire aux suites primaires, ainsi que tout angle (Δ) formé par deux droites issues de O d'ouverture arbitrairement petite est un domaine de remplissage pour la fonction.

La différence entre ces deux sortes de domaines réside en ce que, pour le premier, le théorème de Borel doit être remplacé par

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n}{\log r} = \rho,$$

et non $1 + \rho$.

Le second domaine est un domaine de remplissage d'ordre $1 + \rho$ tandis que le premier n'est qu'un domaine de remplissage d'ordre ρ.

L'intérêt ici est de trouver un domaine de remplissage constitué par une bande de largeur moindre qu'une période ou bien une suite de cercles de remplissage de rayon constant assez petit ou même de rayon infiniment petit.

Une remarque simple qu'on peut faire immédiatement est qu'il n'existe pas une suite de cercles de remplissage de rayon borné et d'ordre supérieur à $\rho - 1$, car l'existence d'une telle suite de cercles implique l'existence d'un domaine de remplissage constitué par une bande de largeur finie perpendiculaire aux suites primaires et d'ordre supérieur à ρ, ce qui est impossible.

25. *Directions d'accumulation.* — Soient

$$a_n(Z) = b_n(Z) + i\varepsilon_n r_n(Z),$$

les zéros fondamentaux de la fonction $f(z) - Z$

$$|b_n(Z)| < \pi.$$

La suite $b_n(Z)$ admet au moins un point d'accumulation X. La droite $x = X$ possède la propriété suivante :

Dans toute bande

$$D\,|x - X| < \varepsilon,$$

aussi petit que soit ε la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois la valeur Z.

Je désigne par

$$n(t, X, \varepsilon, Z) \qquad \text{ou} \qquad n(t, D, Z),$$

le nombre de racines de $f(z) - Z$ situées dans le rectangle défini par

$$D\,|x - X| < \varepsilon,$$
$$|y| < t.$$

On a

$$n(t, X, \varepsilon, Z) \leq n(t, 0, \pi, Z) \qquad [= n(t, Z)].$$

Comme

$$\overline{\lim_{t=\infty}} \frac{\log n(t, Z)}{\log t} = \rho,$$

on a

$$\overline{\lim_{\varepsilon=0}} \left[\overline{\lim_{t=\infty}} \frac{\log n(t, X, \varepsilon, Z)}{\log t} \right] = \rho(X, Z) \leq \rho.$$

$\rho(X, Z)$ sera appelé l'ordre de la direction $x = X$ et cet ordre n'est autre que la limite de l'exposant de convergence des zéros de $f(z) - Z$ dans la bande D quand ε tend vers zéro.

26. *Fonctions d'ordre supérieur à 2.*

THÉORÈME. — *Dans toute direction $x = X$ si l'ordre du nombre de zéros de la fonction $f(z) - Z$ est inférieur à ρ pour trois valeurs de Z, cet ordre est inférieur à ρ pour toutes les valeurs de Z, sauf peut-être pour des Z formant un ensemble de mesure linéaire nulle sur la sphère.*

La démonstration qui suit est inspirée d'une méthode employée par M. Valiron (¹) basée sur une égalité due à M. Milloux (²).

(¹) (V. B.).
(²) (M. A.).

Couvrons le rectangle défini par

$$\mathrm{D}(\varepsilon)\quad \begin{matrix} |y|<\mathrm{Y} \\ |x-\mathrm{X}|<\varepsilon \end{matrix}$$

à l'aide de p cercles C_q centrés sur $x=\mathrm{X}$ et de même rayon $\varepsilon\sqrt{2}$. Chaque point de ce rectangle appartient à deux cercles au plus. Traçons les cercles Γ_q concentriques à C_q et de rayon $k\varepsilon\sqrt{2}(k>1)$. Ces cercles couvrent entièrement le rectangle

$$\mathrm{D}(k\varepsilon)\quad \begin{matrix} |y|<\mathrm{Y} \\ |x-\mathrm{X}|<k\varepsilon \end{matrix}$$

et le couvrent moins de deux fois.

Soient

$$n(\mathrm{C}_q, \mathrm{Z}),\quad n(\Gamma_q, \mathrm{Z})$$

les nombres de zéros de $f(z)-\mathrm{Z}$ respectivement dans C_q et Γ_q. On a, d'après l'inégalité de M. Milloux,

$$n(\mathrm{C}_q\,\mathrm{Z})<\mathrm{A}\sum_{u=a,b,c} n(\Gamma_q, u)+\mathrm{B}-\mathrm{D}\log|\mathrm{Z}, \mathrm{Z}_q|,$$

A, D, sont des constantes ne dépendant pas de a, b, c, Z, q; B ne dépend que de a, b, c; et $|\mathrm{Z}, \mathrm{Z}_q|$ désigne la distance sphérique de Z à une certaine valeur Z_q qui peut évidemment varier avec l'entier q. D'où

$$\sum_{q=1}^{p} n(\mathrm{C}_q, \mathrm{Z})<\mathrm{A}\sum_{q=1}^{p}\sum_{u=a,b,c} n(\Gamma_q, u)+p\,\mathrm{B}-\mathrm{D}\sum_{q=1}^{p}\log|\mathrm{Z}, \mathrm{Z}_q|.$$

Astreignons-nous à prendre $|\mathrm{Z}, \mathrm{Z}_q|>\eta_1 q^{-2}$, η_1 étant donné arbitrairement petit, de sorte que Z sera représenté sur la sphère à l'extérieur des cercles dont la somme des rayons est inférieure à $2\eta_1$. Une limite supérieure du dernier terme de l'inégalité précédente est

$$-\mathrm{D}p\log\eta_1+2\mathrm{D}\log(p!).$$

D'où

$$n[\mathrm{Y}, \mathrm{D}(\varepsilon), \mathrm{Z}]<2\sum_{u=a,b,c} n\left[\mathrm{Y}, \mathrm{D}(k\varepsilon\sqrt{2}), u\right]+p\mathrm{B}-\mathrm{D}p\log\eta_1+2\mathrm{D}\log(p!).$$

On a, par hypothèse,

$$\overline{\lim_{\mathrm{Y}\to\infty}}\frac{\log n\left[\mathrm{Y}, \mathrm{D}(k\varepsilon\sqrt{2}), u\right]}{\log\mathrm{Y}}\leq\rho'<\rho\qquad(u=a, b, c)$$

pour ε suffisamment petit, ce que nous supposons. Puis

$$p\sim\frac{1}{\varepsilon},\qquad \log(p!)<\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Donc

$$p\mathrm{B} - \mathrm{D}p\log\eta + 2\mathrm{D}\log(p!) < \mathrm{A}'\mathrm{Y}\log\mathrm{Y} < \mathrm{Y}^{1+\alpha}$$

pour Y suffisamment grand, α étant un nombre positif donné tel que $1+\alpha$ soit inférieur à ρ. Donc

$$\overline{\lim_{\mathrm{Y}=\infty}} \frac{\log n[\mathrm{Y}, \mathrm{D}(\varepsilon), \mathrm{Z}]}{\log \mathrm{Y}}$$

égale au plus grand des deux nombres ρ' et $1+\alpha$, est inférieure à ρ pour toutes les valeurs de Z, à l'exception peut-être des Z formant un ensemble de mesure linéaire nulle sur la sphère.

Le théorème est ainsi démontré.

Conséquences. — Si une direction $x = \mathrm{X}$ est d'ordre inférieur à ρ pour trois valeurs de Z, on peut trouver $\varepsilon(\mathrm{X})$ tel que

$$\frac{\log n[\mathrm{Y}, \mathrm{D}(\varepsilon), \mathrm{Z}]}{\log \mathrm{Y}}$$

reste inférieur à ρ, dès que ε est inférieur ou égal à $\varepsilon(\mathrm{X})$, et Y suffisamment grand, pour tous les Z, sauf peut-être pour les Z formant un ensemble de mesure linéaire nulle sur la sphère.

THÉORÈME. — *Il existe au moins une direction d'ordre maximum ρ pour tous les* Z, *sauf pour deux* Z *au plus.*

En effet, supposons que toutes les directions sont d'ordre inférieur à ρ (sauf pour les Z formant un ensemble de mesure linéaire nulle sur la sphère).

Pour chaque X compris entre $-\pi + \pi$ il correspond un $\varepsilon(\mathrm{X})$ tel que l'inégalité

$$\overline{\lim_{\mathrm{Y}=\infty}} \frac{\log n[\mathrm{Y}, \mathrm{D}(\varepsilon), \mathrm{Z}]}{\log \mathrm{Y}} < \rho$$

soit vérifiée pour tous les Z (sauf pour un ensemble de mesure linéaire nulle).

Ces $\varepsilon(\mathrm{X})$ ont une borne supérieure ε_1, et il existe un X_1 tel que $\varepsilon(\mathrm{X}_1) > k\varepsilon_1$ (k donné inférieur à 1). Supprimons le domaine

$$\mathrm{D}_1 \; |x - \mathrm{X}_1| < \varepsilon(\mathrm{X}_1).$$

Pour les X restants, les $\varepsilon(\mathrm{X})$ ont une nouvelle borne supérieure $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Il existe un X_2 tel que $\varepsilon(\mathrm{X}_2) > k\varepsilon_2$. Supprimons le domaine

$$\mathrm{D}_2 \; |x - \mathrm{X}_2| < \varepsilon(\mathrm{X}_2)$$

et ainsi de suite.

Au bout d'un nombre fini p d'opérations, toute la bande $-\pi + \pi$ est couverte, sinon en continuant indéfiniment on pourrait définir une suite

infinie X_q telle que $\varepsilon(X_q)$ tend vers zéro et X_q aurait une limite X' n'appartenant pas aux domaines exclus. A X' correspond

$$\varepsilon(X') > \frac{1}{k}\varepsilon(X_q)$$

dès que q est assez grand, ce qui est impossible car les $\varepsilon(X_q)$ ne tendraient pas vers zéro.

On a donc p domaines D_q recouvrant entièrement la bande $-\pi + \pi$ et

$$n(Y, Z) \leq \Sigma n[Y, D_q, Z] \leq pn[Y, D_m, Z],$$

D_m désigne le domaine qui correspond au maximum des n pour une valeur de Y considérée.

D'après la remarque faite plus haut, on a, pour les p domaines D_q,

$$\frac{\log n[Y, D_q, Z]}{\log Y} < \rho$$

lorsque Y est suffisamment grand. Et

$$\frac{\log n(Y, Z)}{\log Y} \leq \frac{\log p}{\log Y} + \frac{\log n[Y, D_m, Z]}{\log Y}.$$

Comme p est fixe, le second membre de cette inégalité sera inférieur à ρ dès que Y sera suffisamment grand. La limite supérieure d'indétermination du premier membre serait donc inférieure à ρ pour tous les Z sauf peut-être pour des Z formant un ensemble de mesure linéaire nulle sur la sphère, ce qui est impossible.

Il existe donc au moins une direction d'ordre maximum ρ pour tous les Z sauf deux Z au plus.

Ces directions jouent un rôle analogue aux directions de Borel d'espèce maximum pour les fonctions méromorphes générales. Mais il s'agit ici non d'angle arbitrairement petit mais de bande arbitrairement petite.

En supposant que $f(z)$ ne contient que des suites de même signe on retombe, pour la fonction entière d'ordre nul correspondante, sur la proposition suivante de M. Valiron :

Pour les fonctions entières d'ordre nul vérifiant

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \frac{\log R_p}{\log p} > 1$$

ce qui entraîne

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{T(R, G)}{(\log R)^2 \log_2 R} = \infty$$

il existe au moins une direction θ *telle que dans l'angle* $|\arg u - \theta| < \varepsilon$ (ε *arbi-*

trairement petit) *on a, pour tous les* c, *sauf deux au plus*,

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{N(R, 0, \varepsilon, c)}{T(R, G)} = k > 0$$

$N(R, 0, \varepsilon, c)$ désigne la moyenne de Jensen des zéros de la fonction $G(u) - c$ contenus dans le secteur

$$|u| < R$$
$$|\arg u - 0| < \varepsilon.$$

Cette direction est ce que M. Valiron nomme direction de caractère positif.

27. *Fonctions d'ordre inférieur à* 2. — On généralise sans peine les démonstrations du numéro précédent aux fonctions d'ordre inférieur à 2.

Montrons d'abord que toute direction d'accumulation des zéros de $f(z)$ est direction d'accumulation de $f(z) - Z$ quelle que soit la valeur de Z.

On a vu que tous les zéros de $f(z) - Z$ finissent par s'accumuler dans les domaines d'exclusion de dimensions arbitrairement petites. S'il y a un nombre fini de zéros de $f(z) - Z$ dans le domaine

$$D(|x - X| < \varepsilon$$

c'est qu'il y a un nombre fini de domaines d'exclusion dans D [on définit les domaines d'exclusion à partir des zéros de $f(z) - Z$], par suite la direction $x = X$ ne peut être direction d'accumulation pour les zéros de $f(z)$.

Les deux théorèmes du numéro précédent sont encore valables ici. Il suffit de modifier la démonstration du premier de ces théorèmes de la façon suivante, le deuxième s'applique sans modification une fois le premier établi :

Circonscrivons aux domaines d'exclusion situés dans $D(\varepsilon)$ des cercles C_q et considérons les cercles Γ_q concentriques et de rayon k fois plus grand ($k > 1$).

Quand q est suffisamment grand C_q est intérieur à $D(\varepsilon)$ et Γ_q est intérieur à $D(k\varepsilon)$.

On a encore, en remarquant que, dans $D(\varepsilon)$, les zéros de $f(z) - Z$ finissent par être dans C_q

$$n[Y, D(\varepsilon), Z] \leq 2 \sum_{u=a,b,c} n[Y, D(k\varepsilon), u] + pB - Dp \log \gamma_1 + 2D \log(p!) + n_0,$$

n_0 désigne le nombre, fini, de zéros de $f(z) - Z$ du domaine $D(\varepsilon)$ en dehors des C_q. Ici p désigne le nombre de domaines d'exclusion intérieurs à $D(\varepsilon)$.

Si l'on définit les domaines d'exclusion à partir des zéros de $f(z) - a$, p est du même ordre que

$$n[Y, D(k\varepsilon), a].$$

Comme

$$\overline{\lim_{Y=\infty}} \frac{\log n[Y, D(k\varepsilon), u]}{\log Y} \leq \rho' < \rho \qquad (u = a, b, c)$$

dès que ε est suffisamment petit, ce que nous supposons, on peut écrire

$$\log D \log(p!) < Y^{\rho'+\varepsilon'}$$

pour Y suffisamment grand, ε' étant choisi tel que $\rho'+\varepsilon'$ soit inférieur à ρ. Donc

$$\overline{\lim_{Y=\infty}} \frac{\log n[Y, D(\varepsilon), Z]}{\log Y} < \rho.$$

Le reste de la démonstration est le même qu'au numéro précédent. D'où :

Il existe au moins une direction d'ordre maximum ρ pour tous les Z sauf deux Z au plus.

En passant aux fonctions $G(u)$, on voit encore que si

$$\overline{\lim} \frac{\log R_p}{\log p} < 1$$

ce qui entraîne

$$\overline{\lim} \frac{T(R, G)}{(\log R)^2} = 0$$

il existe au moins une direction de caractère positif.

M. Valiron a donné une limite inférieure précise de

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{N(R, 0, \varepsilon, \nu)}{T(R, G)}$$

en fonction de ε ([1]).

La méthode employée ici, bien que calquée sur celle de M. Valiron, ne permet pas de conclure dans le cas des fonctions entières périodiques d'ordre 2. On sait que le théorème de M. Valiron s'applique à toutes les fonctions d'ordre nul, par suite pour les fonctions entières périodiques d'ordre 2, il existe encore au moins une direction d'ordre maximum pour tous les Z sauf deux Z ou plus.

28. *Les cercles de remplissage des fonctions d'ordre supérieur à 2.* — Soit $x = X$ une direction d'accumulation d'ordre maximum ρ pour $f(z)$.

Un cercle de rayon constant, aussi petit que l'on veut, et de centre suffisamment loin dans la direction X contient en moyenne

$$K n^{1-\frac{1}{\rho}} \quad \text{(de l'ordre de } K y^{\rho-1}\text{)}$$

suites primaires (K étant une certaine constante et y étant l'ordonnée du centre du cercle).

([1]) (V. B.).

Il faut donc s'attendre à ce qu'il existe une suite de cercles de remplissage d'ordre $\rho - 1$ de rayon arbitrairement petit dans toute direction d'accumulation d'ordre maximum.

Montrons d'abord que dans toute direction d'ordre maximum $D(x = X)$, il existe, pour chaque valeur donnée de Z sauf pour deux Z au plus, une suite infinie de cercles de rayon arbitrairement petit

$$z - z_n < \varepsilon \qquad (z_n \text{ tend vers } \infty)$$

tels que dans chacun de ces cercles la fonction $f(z)$ prend au moins

$$|z_n|^{\rho-1-\eta_n}$$

fois la valeur Z, η_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

En effet, appelons $D(\varepsilon)$ le domaine $|x - X| < \varepsilon$ et découpons $D(\varepsilon)$ en carrés de côté 2ε puis circonscrivons à ces carrés des cercles C_n.

Si, à partir d'un certain rang n, chacun de ces cercles contient moins de

$$|z_n|^{\rho-1-\eta_n}$$

zéros de $f(z) - Z$, le nombre de zéros de cette fonction dans le rectangle

$$|y| < Y, \qquad |x - X| < \varepsilon$$

est moindre que

$$h Y |z_n|^{\rho-1-\eta_n} \sim h Y^{\rho-\eta_n},$$

$$n[Y, D(\varepsilon), Z] < h Y^{\rho-\eta_n},$$

$$\frac{\log n[Y, D(\varepsilon), Z]}{\log Y} < \rho - \eta_n + \frac{\log h}{\log Y}.$$

Cette inégalité est valable, quelle que soit la suite η_n pourvu que les valeurs de Y soient suffisamment grandes.

L'ordre de la direction $x = X$ ne serait donc pas ρ.

La proposition est ainsi établie.

Soit maintenant une suite de cercles C_q de rayon 2ε et recouvrant complètement le domaine

$$D(\varepsilon), \quad |x - X| < \varepsilon.$$

La direction $x = X$ étant une direction d'ordre maximum.

Considérons les racines de l'équation $f(z) - Z = 0$ situées dans un cercle Γ_q (Γ_q concentrique à C_q et de rayon double).

Pour les divers Z le nombre de ces racines a un minimum n'' atteint pour Z''; supprimons dans le voisinage sphérique de Z'' un cercle de rayon d (aussi petit que l'on voudra). Pour les Z restants, ce nombre a encore un minimum n' supérieur ou égal à n'', minimum atteint pour une valeur Z' dont on supprime encore le voisinage sphérique par un cercle de même rayon d. Les Z en dehors

de ces deux cercles de rayon d admettent un nouveau minimum $n(Z)$ atteint pour une valeur que nous appelons Z. Les distances sphériques mutuelles des trois valeurs Z, Z', Z'', sont supérieures à d (1).

On sait que dans C_q, $f(z)$ prendra au plus (2)

$$A\left[n(Z)+\log\frac{2}{d}+\log^+\frac{1}{|a,a_q|}\right]$$

fois toute valeur a, a_q dépendant de q.

Si $n(a)$ désigne le nombre des racines de $f(z)-a$ dans C_q, on a

$$n(Z)>\frac{1}{A}\left[n(a)-\log\frac{2}{d}-\log^+\frac{1}{|a,a_q|}\right].$$

Prenons

$$|a,a_q|>dq^{-2}$$

ce qui revient à exclure encore de la sphère des cercles dont la somme des rayons est moindre que $2d$. D'où

$$n(Z)>\frac{1}{A}\left[n(a)-\log\frac{2}{d^2}-2\log q\right]$$

q est équivalent à

$$\frac{z_q}{2\varepsilon},$$

z_q désigne le centre du cercle C_q.

D'après la propriété précédente on peut trouver une suite de cercles C_q tels que dans chacun de ces cercles la fonction prend au moins

$$|z_q|^{2-1-\eta_q}$$

fois la valeur a. Le nombre $n(a)$ est par suite infiniment grand par rapport à $\log q$. Et

$$n(Z)>K|z_q|^{2-1-\eta_q}>|z_q|^{2-1-\eta_q}$$

η_q est une suite tendant vers zéro comme η'_q.

On obtient donc le théorème suivant :

Dans toute direction d'ordre maximum il existe une suite infinie de cercles C_q de rayon arbitrairement petit tels que dans chacun de ces cercles la fonction prend au moins

$$|z_q|^{2-1-\eta_q} \qquad (z_q \text{ centre de } C_q)$$

fois toute valeur Z représentée à l'extérieur de deux cercles de rayon d_q sur la sphère, η_q et d_q tendant vers zéro avec $\frac{1}{q}$.

---

(1) Ce raisonnement est emprunté à M. Valiron [*voir* VALIRON, *Sur les cercles de remplissage des fonctions méromorphes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 186, 1928)].

(2) (M. A.).

Le fait que d_q tend vers zéro résulte immédiatement de la possibilité de choisir, dans l'inégalité écrite plus haut, le nombre d de l'ordre de $\frac{1}{q}$.

Ces cercles sont des cercles de remplissage d'ordre $\rho - 1$, et ce sont des cercles de remplissage de rayon borné d'ordre maximum, d'après une remarque du n° 24.

On sait d'ailleurs qu'il existe des cercles de remplissage de rayon arbitrairement petit pour toute fonction méromorphe telle que

$$\overline{\lim_{r=0}} \frac{T(r, f)}{r^2} = \infty$$

condition manifestement satisfaite ici pour la fonction $f(z)$.

29. *Fonctions d'ordre inférieur à 2.* — Ici, la distance entre deux suites primaires consécutives grandit indéfiniment en général.

Il ne saurait exister de cercles de remplissage de rayon borné et d'ordre non nul.

Cependant, comme les zéros de $f(z) - Z$ finissent par s'accumuler dans des domaines de dimensions infiniment petites, il faut s'attendre à ce que, dans chacun de ces domaines, la fonction prenne au moins une fois toute valeur Z donnée, pourvu que le rang du domaine soit suffisamment élevé.

Ce point est aisé à démontrer :

En effet, partons des zéros fondamentaux de $f(z)$, et traçons autour du zéro a_n comme centre, un rectangle D_n de côtés

$$e^{-|a_n|^2} \quad \text{et} \quad |a_n|^{-A}$$

parallèles respectivement à Ox et Oy ; A étant un nombre positif donné quelconque.

On a vu que les zéros de $f(z) - Z$ finissent par être situés entièrement à l'intérieur de ces domaines D_n. (En effet, dans le reste du plan $\log f(z)$ reste équivalent à $\log M(y)$ pour y suffisamment grand.)

Soit maintenant Z donné quelconque de module inférieur à un nombre fixe N, aussi grand que l'on veut.

Je dis qu'à partir d'un certain rang, $n(A, N)$, chaque domaine D_n contient au moins un zéro de

$$f(z) - Z.$$

Partons des zéros fondamentaux de $f(z) - Z$ et définissons autour de chacun de ces zéros $a_p(Z)$, un domaine Δ_p comme on a défini D_n.

Tous les zéros de $f(z)$ finissent par être entièrement à l'intérieur de ces domaines Δ_p.

Si donc il y a une suite infinie de domaines D_n ne contenant aucun zéro de $f(z)-Z$, les centres de ces domaines D_n, c'est-à-dire les zéros de $f(z)$, finissent par être à l'extérieur des domaines Δ_n, ce qui est impossible.

On obtient par suite la proposition suivante :

Il existe une suite infinie de domaines D_n *de dimensions*

$$e^{-|a_n|^2} \quad |a_n|^{-\lambda}$$

tels que, à partir d'un certain rang $n(A, N)$ *dans chaque domaine* D_n *la fonction prend au moins une fois toute valeur Z donnée de module inférieur à* N.

Dans toute direction d'accumulation $x=X$ il existe naturellement une telle suite de domaines D_n.

Application. — En passant aux fonctions entières d'ordre nul, on voit que, pour celles de ces fonctions qui satisfont à la condition

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{T(R, G)}{(\log R)^2} = 0$$

les points pour lesquels

$$|G(u)| < N \qquad (N \text{ nombre positif donné})$$

forment une suite de domaines D_m fermés, vus de l'origine sous un angle infiniment petit et tels que si u_m et u'_m désignent deux points quelconques d'un tel domaine, on a

$$\lim_{m=\infty} \left| \frac{u'_m - u_m}{u_m} \right| = 0.$$

On reconnaît une proposition de M. Valiron (1).

Ici, on peut donner un ordre de grandeur des dimensions de ces domaines :

L'angle sous lequel on voit D_m est de l'ordre de $e^{-\log^2 u_m}$, et la plus grande dimension de D_m est de l'ordre de

$$(\log u_m)^{-\lambda} u_m.$$

On trouve de tels domaines dans toutes les directions de Borel de la fonction.

(1) (V. T.).

SUR

CERTAINS SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX PARATINGENTS

PAR M. J. COLMEZ.

INTRODUCTION.

1. Les résultats classiques de la théorie des systèmes triples orthogonaux sont obtenus en supposant l'existence, sur les surfaces considérées, de dérivées d'ordre plus ou moins élevé.

C'est ainsi que, pour démontrer le théorème de Dupin, on suppose que $M(u, v, w)$ possède les dérivées croisées $\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}, \dots$, si $M(u, v, w) = M$ symbolise la transformation orthogonale

$$x(u, v, w) = x, \qquad y(u, v, w) = y, \qquad z(u, v, w) = z,$$

les surfaces $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$, formant le système triple envisagé; la condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces $u = \text{const.}$ forment une famille de Lamé, c'est-à-dire l'une des familles d'un système triple orthogonal, s'exprime par une équation aux dérivées partielles du troisième ordre; pour démontrer que toute solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\sqrt{\left(\overrightarrow{\text{Grad}(u)}\right)^2} = \frac{1}{S(M, u)},$$

où $S(M, u) = 0$ est l'équation d'une sphère dépendant du paramètre u, définit une famille de Lamé, on peut, de l'équation du troisième ordre, revenir à la définition géométrique, mais alors, on suppose au moins, l'existence de dérivées secondes sur les surfaces de niveau de u.

2. Cependant, la définition des systèmes triples orthogonaux n'exige que l'existence des dérivées premières, sur les surfaces considérées.

Il est utile de poser le problème d'une façon précise dans le langage de la géométrie infinitésimale directe, en nous servant de la notion *d'intégrale paratingente* d'un système d'équations aux dérivées partielles, introduite par M. Bouligand :

Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles, entre un certain nombre de variables et de fonctions, on appelle intégrale paratingente, dans un certain domaine R, *une multiplicité intégrale dans l'espace constitué par les fonctions et les variables qui, dans le domaine* R *de cet espace, admet, en chaque point, une multiplicité linéaire tangente continue : en conséquence :*

Soit u, v, w trois fonctions des variables x, y, z; nous dirons que ces trois fonctions définissent *un système triple orthogonal paratingent* (*S. T. O. P.*), dans un certain domaine R de l'espace, *si les équations*

$$u(x, y, z) = u, \qquad v(x, y, z) = v, \qquad w(x, y, z) = w$$

définissent, dans ce domaine, une transformation ayant une transformation linéaire tangente continue, orthogonale et à Jacobien non nul et sont, en outre, uniformes : ce qui revient à dire que *les trois fonctions sont uniformes dans la région et y possèdent des gradients continus, non nuls, vérifiant le système :*

$$(1) \qquad 0 = \overrightarrow{\mathrm{Grad}(u)}.\overrightarrow{\mathrm{Grad}(v)} = \overrightarrow{\mathrm{Grad}(v)}.\overrightarrow{\mathrm{Grad}(w)} = \overrightarrow{\mathrm{Grad}(w)}.\overrightarrow{\mathrm{Grad}(u)}.$$

et nous dirons qu'une fonction u définit *une famille de Lamé paratingente* (*F. L. P.*), dans un domaine R, si, dans R, *on peut lui associer deux fonctions* v *et* w, *qui forment avec elle un S. T. O. P.* (1).

3. On cherche, alors, dans quelles conditions certains des résultats classiques sont conservés. M. Bouligand (2) a en particulier, montré que, si une F. L. P. est formée de surfaces parallèles, celles-ci sont à courbure bornée et possèdent des éléments de contact du 2e ordre : *la normale à chaque surface est dérivable sur cette surface*, qui est dite alors, *surface* S_2 (une S_2 est encore *l'image d'un plan par une transformation de la topologie restreinte du 2e ordre*); et que, si une F. L. P. est composée de plans, les trajectoires orthogonales sont à *courbure bornée et possèdent un cercle de courbure continu.*

Il se produit le phénomène important que M. Bouligand appelle *superdérivabilité :* en supposant, seulement, l'existence des dérivées premières, on montre

(1) On pourrait chercher à élargir encore les hypothèses : par exemple, supposer seulement que les surfaces $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$ possèdent un paratingent continu. Mais, on peut trouver des exemples de tels systèmes où le trièdre trirectangle, tangent en chaque point aux surfaces, n'est pas continu par rapport à l'ensemble des variables x, y, z. En tout cas, toutes les hypothèses que nous venons d'introduire sont effectivement utilisées dans les résultats jusqu'à présent obtenus.

(2) *Voir* G. Bouligand, *Bull. Soc. roumaine math.*, t. 33, p. 57-67.

l'existence de certaines dérivées secondes, en particulier l'existence des lignes de courbure sur les surfaces de la F. L. P.

Dans sa thèse [Paris, juin 1947 (1)], M. Llensa généralise ces résultats (en prolongeant les considérations du Chapitre III de l'Ouvrage de Darboux sur les systèmes triples orthogonaux) en cherchant les F. L. P., telles que la fonction u vérifie une équation du type

$$\sqrt{\left(\overrightarrow{\mathrm{Grad}(u)}\right)^2} = \frac{1}{S(M, u)},$$

où $S(M, u) = 0$ est l'équation d'une sphère dépendant continuement du paramètre u : dans la théorie classique, on montre qu'on passe de la surface $u = \text{const}$ à la surface infiniment voisine par une transformation par parallélisme, dans la géométrie de Poincaré d'absolu $S(M, u) = 0$ (transformation de Ribaucourt) et l'on en déduit que toute solution analytique de l'équation précédente définit une famille de Lamé.

M. Llensa étudie les solutions paratingentes de cette équation et démontre que, si R est un domaine de l'espace x, y, z, u, où $S(M, u)$ est $\neq 0$:

1° *Toute surface* $u = \text{const.}$, *dans ce domaine, est à courbure bornée, et, réciproquement, toute surface paratingente à courbure bornée dans ce domaine est surface de niveau d'une solution paratingente de l'équation.*

2° *Toute surface* $u = \text{const.}$, *où* u *définit une F. L. P. dans* R, *est une surface* S_2, *et, réciproquement, toute surface* S_2 *dans* R, *possédant un réseau de lignes de courbure orthogonal, est telle que la solution qu'on en déduit définit une F. L. P.*

3° Les résultats classiques sur la transformation de Ribaucourt sont conservés et, si un système possède deux F. L. P. de cette sorte, le théorème de Dupin est vrai.

4. Le phénomène de superdérivabilité est obtenu grâce à l'hypothèse que u vérifie l'équation précédente.

Nous nous proposons, dans le présent Mémoire, de montrer que :

I. Certains de ces résultats restent valables, si l'on astreint sans plus u à vérifier une équation du type élargi

$$\sqrt{\left(\overrightarrow{\mathrm{Grad}(u)}\right)^2} = F(M, u) \quad (2), \tag{2}$$

(1) *Voir* le résumé des résultats de cette thèse aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 220, p. 297; t. 222, p. 261; t. 222, p. 845.

(2) L'adoption de ce type d'équation, en même temps qu'elle rattache à nos déductions ultérieures développées sous forme autonome, l'équation du 1er ordre étudiée par M. Llensa, a encore l'avantage d'englober au moins des équations obtenues en éliminant un paramètre α entre deux relations de la

où $F(M, u)$, *le nouveau second membre*, est $\neq 0$ et *possède des dérivées secondes continues par rapport à* x, y, z *et est seulement continu par rapport à* u, dans un certain domaine R de l'espace x, y, z, u; d'une façon précise, nous montrons que, dans R :

1° *le résultat* (1) *de M. Llensa reste vrai*; 2° *que si une fonction u solution de l'équation définit en outre une F. L. P., ses surfaces de niveau sont des* S_2; 3° *que le résultat* (3) *de M. Llensa reste valable.*

La méthode employée est la généralisation naturelle de la méthode que M. Llensa a suivie dans l'étude de l'équation

$$\sqrt{\left(\overrightarrow{\text{Grad}(u)}\right)^2} = \frac{1}{S(M, u)}.$$

Caractérisant les trajectoires orthogonales des intégrales paratingentes par la propriété *de rendre minima la solution d'une certaine équation différentielle*, définie sur toute courbe à tangente continue, il montre que *toute solution paratingente est enveloppe d'une certaine intégrale complète paratingente* à surface de niveau sphérique, qu'il obtient par analogie avec le cas classique. Nous remplaçons cette intégrale complète par une intégrale directement construite à partir des trajectoires orthogonales définies *a priori* par un certain système différentiel, mais cette intégrale n'étant pas paratingente en un point au moins nous introduisons *la notion d'intégrale semi-paratingente supérieure* (*inférieure*) *pour* $u = u_0$.

Une intégrale de l'équation (2) sera dite *semi-paratingente supérieure* (*inférieure*) *pour* $u_0 = u$, *si pour* $u > u_0$ ($u < u_0$) *elle est paratingente et si sa surface de niveau* $u = u_0$ *est réduite à un point* M_0, *où les conditions suivantes sont remplies : Si* $M \to M_0$ *suivant une direction déterminée*, $\overrightarrow{\text{Grad}(u)}$ *tend vers une limite et, en* M_0 *les trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau ont une tangente.*

Ces intégrales jouissent de toutes les propriétés des intégrales à surfaces de niveau sphérique utilisées par M. Llensa et simplifient les démonstrations [en supprimant la nécessité de n'utiliser que des intégrales paratingentes (1)].

II. Les résultats obtenus précédemment par M. Bouligand, dans le cas des F. L. P. formées de surfaces parallèles ou de plans, peuvent se généraliser dans deux directions différentes.

---

forme $u(x, y, z, \alpha) = 0$, $\text{Grad}\, u = F(x, y, z, \alpha)$, dont la première définit les familles de Lamé $\mathcal{L}_\alpha$ en dépendance continue de ce paramètre et dont la seconde détermine, pour chaque α, la fonction $\text{Grad}\, u$ du point x, y, z.

(1) M. Llensa obtient ces intégrales dans son intégrale complète, mais il ne s'en sert que dans leurs parties paratingentes.

1. *Si les surfaces de niveau d'une F. L. P. font partie d'une famille plus étendue de surfaces vérifiant certaines conditions de dérivabilité (par exemple, cas où ce sont des plans), les trajectoires orthogonales sont à courbure bornée et à cercle de courbure continu* (1).

2. *Si les trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau de la F. L. P. font partie d'une famille plus étendue de courbes, vérifiant certaines conditions de dérivabilité (par exemple, cas des surfaces parallèles), les surfaces de la F. L. P. sont des S à courbure bornée* (1).

III. Dans les divers cas envisagés, en plus du phénomène de superdérivabilité envisagé, on montre que, dans les S. T. O. P. correspondants, *les dérivées* M''_{uv} *et* M''_{vw} *existent et sont continues.*

L'étude de la troisième dérivée croisée M''_{uv} (ou M''_{vu}) conduit au résultat suivant, qui généralise le théorème de Dupin au delà de sa forme classique :

Si, dans un S. T. O. P., M''_{uv} *et* M''_{vw} *existent et sont continues (en particulier dans les trois cas envisagés plus haut) et si* $\overrightarrow{\text{Grad}(v)}$ *vérifie une condition de Lipschitz par rapport à w, les lignes d'intersection des surfaces du S. T. O. P. sont lignes de courbure sur chaque surface. Ces courbes sont, alors, à courbure géodésique bornée* (2). *C'est le cas, en particulier, si deux des F. L. P. du système vérifient une des conditions énoncées plus haut.*

CHAPITRE I.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $\sqrt{\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,(u)\right)^2} = F(M, u)$.

I. — Lemmes sur les systèmes différentiels.

1. Nous rappelons les lemmes suivants :

Soit le système différentiel suivant :

$$\frac{dy_i}{dx} = F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si les $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ sont continus, dans un domaine R (3) fermé de l'espace

(1) *Voir* Chapitre II, paragraphes 2 et 3; les familles dépendent d'un nombre fini de paramètres, le vecteur normal ou tangent étant fonction continuement dérivable de tous les paramètres; de plus, on suppose que les paramètres sont localement effectifs : Le déplacement différentiel d'un point quelconque d'une surface ou d'une courbe dépend effectivement des différentiels des paramètres.

(2) *Voir* la fin du paragraphe 4 du Chapitre II.

(3) Nous appelons domaine, une partie ouverte bornée et simplement connexe de l'espace et région, la fermeture d'un tel ensemble.

à $n+1$ dimensions $x, y_1, \ldots, y_n$, il existe une courbe intégrale, au moins, du système qui passe par un point $M_0(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$ quelconque de R, prolongeable jusqu'à la frontière de R.

Soit $y_i(x, x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$ une telle solution : si les $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ sont *continuement dérivables par rapport aux* y_i, alors cette solution est *unique* et les $y_i(x, x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$ sont *continuement dérivables par rapport à tous les arguments. De plus, le déterminant fonctionnel* $\left(\frac{\partial y_i}{\partial y_{0k}}\right)$ *est différent de zéro dans* R, ce qui veut dire que les paramètres y_{0k} sont effectifs.

2. Étant donnée une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

où $F(x, y)$ est continue dans une région R du plan, parmi toutes les intégrales passant par $M_0(x_0, y_0) \in R$, *il existe une intégrale maximale et une intégrale minimale*, c'est-à-dire une intégrale $Y_M \geq y$ et une intégrale $Y_m \leq y$ quel que soit x.

Soit, alors, les deux équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = G(x, y), \tag{2}$$

où F et G sont continues dans une région R, avec $F \geq G$ dans R.

Si y est une solution de (2) passant par M_0 et si $Y_M(Y_m)$ est la solution maximale (minimale) de (1) passant par M_0, on a

$$y \leq Y, \quad \text{si} \quad x \geq x_0,$$
$$y \geq Y, \quad \text{si} \quad x \leq x_0.$$

Ceci va nous permettre de démontrer :

3. Lemme. — *Si, dans un domaine* R, $F \geq G$ *et si, pour tout point* M_0 *de* R, *l'équation* (1) *a une solution unique passant par* M_0, *toute solution de* (2) *passant par* M_0 *est*

$$y \leq Y, \quad \text{si} \quad x \geq x_0,$$
$$y \geq Y, \quad \text{si} \quad x \leq x_0,$$

et, si, pour une valeur $x_1 \geq x_0$ $(x_1 \leq x_0)$, *on a*

$$\text{soit} \quad y < Y \ (y > Y);$$
$$\text{soit} \quad F\big(x_1, y(x_1)\big) > G\big(x_1, y(x_1)\big);$$
$$\text{soit} \quad F\big(x_1, Y(x_1)\big) > G\big(x_1, Y(x_1)\big),$$

alors

$$y < Y, \quad \text{pour} \quad x > x_1, \quad (y > Y, \text{ pour } x < x_1).$$

Démonstration. — La première partie est la conséquence du lemme précédent.

Supposons que, pour $x = x_1$,

$$y = y(x_1) < Y(x_1);$$

dans le domaine R, par le point $M(x_1, y_1)$, il passe une intégrale Y_1 et une seule de (1) et, en vertu de la première partie, $y \leq Y_1$, si $x \geq x_1$; mais,

$$Y_1(x) < Y(x), \quad \text{si} \quad x \geq x_1,$$

car ceci est vrai pour $x = x_1$ et, par tout point de R il ne passe qu'une intégrale de (1) : donc

$$y \leq Y_1 < Y, \quad \text{si} \quad x \geq x_1.$$

Supposons, maintenant, que, pour une valeur $x = x_1$,

$$F\big(x_1, Y(x_1)\big) > G\big(x_1, Y(x_1)\big)$$

ou

$$F\big(x_1, y(x_1)\big) > G\big(x_1, y(x_1)\big),$$

ou bien

$$y(x_1) < Y(x_1),$$

alors, d'après ce qui précède, $y < Y$, si $x \geq x_1$, ou bien

$$y(x_1) = Y(x_1), \quad \text{alors} \quad \frac{dy}{dx} < \frac{dY}{dx}$$

et, pour $x > x_1$, suffisamment voisin de x_1, on a $y < Y$

$$\text{donc} \quad y < Y, \quad \text{donc} \quad y < Y, \quad \text{si} \quad x < x_1.$$

Remarque. — Si $x_1 \neq x_0$, $y < Y$, pour $x \geq x_1$, $(y > Y$, si $x \leq x_1)$.

II. — Les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau des solutions paratingentes de $\sqrt{\big(\overrightarrow{\text{grad}(u)}\big)^2} = F(M, u)$.

1. *Dans toute la suite, l'équation*

$$\sqrt{\big(\overrightarrow{\text{Grad}(u)}\big)^2} = F(M, u) \tag{1}$$

sera telle que, dans un domaine de l'espace (x, y, z, u), $F(M, u)$ *soit positive, continue par rapport à* u *et possède des dérivées secondes continues par rapport à* x, y, z.

Nous désignerons par $R(u_0)$, *la section, par le plan* $u = u_0$, dans l'espace (x, y, z, u), du domaine R.

Soit une *intégrale paratingente* de (1) dans une région $R' \subset R$, c'est-à-dire, *une fonction* $u(x, y, z)$, *telle que, si* x, y, z, u *est un point de* R', u *est uniforme et vérifie* (1) et $\overrightarrow{\text{Grad}(u)}$ *est continu par rapport à* x, y, z *ou, d'une façon moins stricte, soit une intégrale semi-paratingente* (1) *supérieure* (*inférieure*) pour $u = u_0$, c'est-à-dire *une fonction vérifiant toutes les conditions précédentes pour* $u > u_0$ ($u < u_0$), *suffisamment voisin de* u, *telle que la surface de niveau* $u = u_0$ *se réduise à un point* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $((x_0, y_0, z_0, u_0)$ *est dans* R'), *tel que, si* $M \to M_0$ *suivant une direction déterminée,* $\overrightarrow{\text{Grad}(u)}$ *ait une limite et que les trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau aient une tangente en* M_0. Dans ce cas, nous ne considérons que les valeurs de $u > u_0$ ($u < u_0$), suffisamment voisines de u_0.

Soit un arc de courbe, à tangente continue, allant du point M_0 de la surface $u = u_0$ (surface notée (u_0)) au point M_1 de la surface (u_1). En tout point $M(x, y, z)$ de cet arc, il existe une valeur $u(x, y, z)$, qui vérifie la relation différentielle

$$du = \overrightarrow{\text{Grad}(u)} . d\vec{M}.$$

c'est-à-dire, que u considéré comme fonction de l'arc, vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dT}{ds} = F\big(M(s), T\big)\cos(\varepsilon), \tag{2}$$

définie sur la courbe, où ε est l'angle de la tangente à la courbe avec $\overrightarrow{\text{Grad}(u)}$, qui est une fonction continue de l'arc, d'après les hypothèses.

Soit, d'autre part, l'équation différentielle

$$\frac{dT}{ds} = F\big(M(s), T\big). \tag{3}$$

D'après les hypothèses, le deuxième membre est dérivable par rapport à s et positif; donc, il n'existe qu'une seule solution T prenant une valeur déterminée, en un point déterminé.

Supposons que la courbe C ne soit pas trajectoire orthogonale des surfaces (u), en un point quelconque de l'arc fermé M_0M_1 : donc, en ce point, de paramètre s_1, $\cos(\varepsilon) < 1$, donc

$$F\big(M(s_1), u\big)\cos(\varepsilon) < F\big(M(s_1), u\big),$$

donc, si T est la solution de (3), qui prend la valeur u_0 au point M_0, $T > u$, si $s > s_1$, ou, si $s \leq s_1$ avec $s_1 \neq s_0$. De toute façon,

$$T(M_1) > u_1.$$

---

(1) *Voir* Introduction, n° 4.

D'autre part, étant données les hypothèses, si C est trajectoire orthogonale, elle est à tangente continue, puisque $\overrightarrow{\text{Grad}(u)}$ est continu et que, en M_0, elle possède une tangente. Les équations (2) et (3) coïncident, donc $T(M_1) = u_1$.

D'où le théorème (1) :

Les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau d'une intégrale (semi-) paratingente (supérieure pour $u = u_0$) sont caractérisées, parmi les courbes à tangentes continues, comme minimisant, pour $u > u_0$, la solution de l'équation (3), qui, sur (u_0) prend là valeur u_0.

On a évidemment la propriété correspondante pour $u < u_0$, avec les intégrales (semi-) paratingentes (inférieures pour $u = u_0$).

2. Nous désignerons par *intégrale complète (semi-) paratingente (supérieure ou inférieure) dans* R, *une intégrale (semi-) paratingente (supérieure ou inférieure, pour $u = u_0$), dépendant d'un certain nombre de paramètres* (2), *et vérifiant les conditions suivantes :*

1° *Les trajectoires orthogonales* $\mathcal{C}$ *des surfaces de niveau de l'intégrale complète (paramétrées par rapport à u) sont déterminées d'une façon unique, si l'on se donne le point* M_0 *et la tangente* $\vec{h}_0$ (3), *pour la valeur* u_0 *du paramètre* $(M_0, u_0) \in R$.

2° *Si* M_0 *et* M_1 *sont suffisamment voisins, il existe, au moins, une courbe* $\mathcal{C}$ *passant en* M_0 *pour la valeur* u_0 *du paramètre et en* M_1, *pour* $u_1 > u_0$ (*s'il s'agit d'intégrale semi-paratingente supérieure*) *ou pour* $u_1 < u_0$ (*s'il s'agit d'intégrale semi-paratingente inférieure*).

Nous désignerons, provisoirement, par $\mathfrak{U}$ une intégrale appartenant à l'intégrale complète.

Soit, alors, une intégrale quelconque, paratingente dans $R' \subset R$, et soient $M(x_0, y_0, z_0)$ sur (u_0) $((x_0, y_0, z_0, u_0) \in R)$ et $\mathcal{C}'$ trajectoire orthogonale aux surfaces (u), passant en M_0; soit M_1 sur $\mathcal{C}'$ pour $u = u_1$, suffisamment voisin de M_0 : il existe, alors, une courbe $\mathcal{C}$ passant par M_0 et M_1, correspondant à l'intégrale $\mathfrak{U}$ dont la surface $\mathfrak{U} = u_0$ passe par M_0. En M_1, l'intégrale u prend la valeur u_1 et l'intégrale $\mathfrak{U}$ la valeur u'_1.

Appliqué à $\mathcal{C}$, le théorème 1 montre que $u'_1 \geq u_1$ et, appliqué à $\mathcal{C}'$, il montre que $u_1 \geq u'_1$, donc $u_1 = u'_1$. Or, le même théorème dit que, si $\mathcal{C}'$ n'est pas ortho-

---

(1) Dû à M. Llensa, mais celui-ci ne fait pas intervenir les intégrales semi-paratingentes : elles simplifient beaucoup les démonstrations ultérieures.

(2) u_0 dépend évidemment des paramètres.

(3) Les courbes $\mathcal{C}$ sont toujours considérées comme orientées suivant les u croissants. Dans la démonstration ultérieure, u doit être $> u_0$ ($u < u_0$) s'il s'agit d'une intégrale semi-paratingente supérieure (inférieure).

gonale aux surfaces $\mathcal{U} = \text{const.}$, $u_1 > u'_1$, donc $\mathcal{C}'$ est orthogonale aux surfaces $\mathcal{U} = \text{const.}$, donc $\mathcal{C}'$ est une courbe $\mathcal{C}$ et, de même, $\mathcal{C}$ est orthogonale aux surfaces (u) : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ayant la même tangente en M_1 (la normale à (u_1)), elles sont confondues.

Donc, toute solution paratingente de (1) a pour trajectoires orthogonales à ses surfaces de niveau des courbes $\mathcal{C}$. Il en résulte que, si deux intégrales paratingentes ont leurs surfaces de niveau respectives, pour la même valeur de u, tangentes en un point, il en est de même en tout point de la courbe $\mathcal{C}$, normale en ce point aux surfaces de niveau.

D'où le théorème :

L'ensemble des courbes $\mathcal{C}$ est l'ensemble des trajectoires orthogonales aux intégrales paratingentes de (1) *dans toute région* $R' \subset R$. *Deux intégrales paratingentes dans* R', *considérées comme définissant des surfaces dans* R', *sont tangentes tout le long d'une courbe $\mathcal{C}$ (considérée comme appartenant à l'espace à quatre dimensions x, y, z, u), si elles sont tangentes en un point de cette courbe.*

III. — Existence d'une intégrale complète semi-paratingente supérieure (inférieure).

1. Le cône élémentaire de l'équation (1) est un cône de révolution, d'axe parallèle à l'axe des u : dans la théorie classique, les courbes $\mathcal{C}$ sont les supports ponctuels des caractéristiques. Elles sont définies par le système :

$$\Sigma \begin{cases} \vec{M}'_u = \dfrac{\vec{h}}{F}, \\ \vec{h}'_u = \left(\overrightarrow{\text{Grad}\left(\dfrac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h} \right) \wedge \vec{h}, \end{cases}$$

le paramètre étant u, $\vec{h}$ étant le vecteur unitaire tangent, orienté dans le sens des u croissants.

Considérons ici, *a priori*, le système Σ; puisque $F(M, u)$ est dérivable, continuement, jusqu'au 2e ordre et reste positif dans R, d'après le lemme rappelé en (1) du paragraphe 1, il existe une solution et une seule, telle que M et $\vec{h}$ prennent, pour $u = u_0$ les valeurs $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{h}_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, si $(M_0, u_0) \in R$ et quel que soit $\vec{h}_0$.

Soient

$$M = M(u, u_0, M_0, \vec{h}_0) = M(u, u_0, x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0),$$
$$\vec{h} = \vec{h}(u, u_0, M_0, \vec{h}_0) = \vec{h}(u, u_0, x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0),$$

M et $\vec{h}$ continuement dérivables pour tous leurs arguments, les paramètres x_0, y_0, z_0, α_0, β_0, γ_0 étant essentiels.

Si $\left(\vec{h}_0\right)^2 = 1$, $\left(\vec{h}\right)^2 = 1$, car

$$\vec{h}'_u \cdot \vec{h} = 0.$$

Nous appellerons courbes C, *les courbes intégrales définies dans* R *avec* $(M_0, u_0) \in R$ *et* $\left(\vec{h}_0\right)^2 = 1$.

(M_0, u_0) étant quelconque dans la région $R' \subset R$, le champ total des variables M_0, u_0, $\vec{h}_0$ est un compact; donc on peut choisir u suffisamment voisin de u_0 pour que, quelles que soient ces variables dans ce champ, $|MM_0|$ soit $<$ à un nombre donné positif, donc pour que M soit dans R (car R est ouvert et R′ est fermé).

Considérons alors, pour M_0, u_0, et u donné, le lieu de M :

Si ce lieu admet, au point M, *un paratingent plan, ce paratingent est perpendiculaire à* $\vec{h}$.

En effet, M étant dérivable par rapport aux paramètres λ et μ du vecteur $\vec{h}_0$, nous avons

$$\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial \lambda \, \partial u} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\right) = \frac{1}{F}\frac{\partial \vec{h}}{\partial \lambda} + \vec{h}\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}\right),$$

donc $\dfrac{\partial^2 \vec{M}}{\partial \lambda \, \partial u}$ est continu par rapport à λ et u; donc $\dfrac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u \, \partial \lambda} = \dfrac{\partial^2 \vec{M}}{\partial \lambda \, \partial u}$. Alors

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}\right) = \vec{M}'_\lambda \cdot \left[\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h}\right) \wedge \vec{h}\right] + \vec{h} \cdot \left[\frac{1}{F}\frac{\partial \vec{h}}{\partial \lambda} + \vec{h}\left(\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)}\right) \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}\right)\right]$$

$$= \left(\vec{h} \cdot \vec{M}'_\lambda\right)\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \cdot \vec{h}\right),$$

d'où, la quantité $\vec{h} \cdot \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}\right) = \left(\vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}\right)\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \cdot \vec{h}\right).$$

D'après les théorèmes classiques, cette équation étant homogène d'une part, et, d'autre part, pour $u = u_0$, $\vec{h} \cdot \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} = 0$, puisque M_0 est indépendant de $\vec{h}_0$, d'où $\vec{h} \cdot \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} = 0$. C. Q. F. D.

D'autre part, $\vec{h}$ est fonction dérivable des paramètres λ et μ; donc, si le lieu de M admet un paratingent plan, c'est une S_2.

2. *Étant donnée une région* R′ *fermée contenue dans* R, *il existe* η *tel que, si* $|u-u_0|<\eta$, *le lieu de* M, *envisagé plus haut, est une surface fermée, ayant un paratingent en tout point, contenue dans* R; *les divers lieux, obtenus pour* M_0 *et* u_0 *fixes et diverses valeurs de* u, *s'emboîtent les uns dans les autres, comme des sphères concentriques de rayons* $|u-u_0|$, *et ceci quel que soit* $(M_0, u_0)\in R'$.

Démonstration. — Soit $(M_0, u_0)\in R'$, fermée dans R, et considérons le point P défini par

$$P = M_0 + \frac{(u-u_0)\vec{h}_0}{F(M_0, u_0)} = \vec{M}_0 + \frac{(u-u_0)\vec{h}_0}{F(o)},$$

où nous mettons $F(o)$ pour $F(M_0, u_0)$.

A tout point P, correspond $\vec{h}$ et $u-u_0>o$ ($et\ u-u_0<o$), déterminés d'une façon unique, donc un point $M\left(u, u_0, M_0, \vec{h}_0\right)$, si $|u-u_0|$ est assez petit et ceci indépendamment de $\vec{h}_0$ et de (M_0, u_0) dans R′.

Soit H cette transformation : $HP=M$ et H dépend de u_0 et M_0, soit $H(M_0, u_0)$.

M dépend de u et des deux paramètres λ et μ de $\vec{h}_0$. Considérons le jacobien $\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\mu}\right)$, le jacobien J de H est

$$\frac{\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\mu}\right)}{\left(\frac{\partial\vec{P}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{P}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\vec{P}}{\partial\mu}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\mu}\right)}{\left(\frac{\vec{h}_0}{F(o)}, \frac{1}{F(o)}\frac{\partial\vec{h}_0}{\partial\lambda}, \frac{1}{F(o)}\frac{\partial\vec{h}_0}{\partial\mu}\right)(u-u_0)}.$$

Or, nous avons $M=\int_{u_0}^{u}\frac{\vec{h}\,du}{F}+M_0$, et alors

$$\frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}=\int_{u_0}^{u}\frac{\partial\vec{h}}{\partial\lambda}\frac{1}{F}+\vec{h}\left(\left(\overrightarrow{\mathrm{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)}\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}\right)\right)du=\int_{u_0}^{u}G\left(u, u_0, \vec{M}_0, \vec{h}_0\right)du,$$

où $G\left(u, u_0, M_0, \vec{h}_0\right)$ est une fonction continue des sept variables $x, y, z_0, \lambda, \mu, u_0, u$ qui, lorsqu'on limite la variation de u à un intervalle fermé de milieu u_0, pour chaque valeur de u_0, parcourent un ensemble compact : la fonction G est alors uniformément continue sur ce compact. Donc, on peut poser

$$G\left(u, u_0, M_0, \vec{h}_0\right)=G\left(u_0, u_0, M_0, \vec{h}_0\right)+\alpha,$$

où α tend uniformément vers zéro, si $u\to u_0$.

Or,

$$G\left(u_0, u_0, M_0, \vec{h}_0\right)=\frac{\vec{h}_0}{F(o)}, \qquad \text{car} \quad \frac{\partial\vec{M}_0}{\partial\lambda}=o,$$

d'où

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} = \int_{u_0}^{u} \left(\frac{\vec{h}_0}{F(o)} + \alpha \right) du = \left(\frac{\vec{h}_0}{F(o)} + \alpha_1 \right)(u - u_0),$$

et finalement

$$J = \frac{\left(\frac{\vec{h}_0}{F(o)} + \alpha_3, \frac{\partial \vec{h}_0}{\partial \lambda} \frac{1}{F(o)} + \alpha_1, \frac{\partial \vec{h}_0}{\partial \mu} \frac{1}{F(o)} + \alpha_2 \right)}{\left(\frac{\vec{h}_0}{F(o)}, \frac{\partial \vec{h}_0}{\partial \lambda} \frac{1}{F(o)}, \frac{\partial \vec{h}_0}{\partial \mu} \frac{1}{F_0} \right)} = 1 + \beta,$$

où β tend uniformément vers zéro, si $u \to u_0$; donc, étant donné R', on peut trouver τ_1 tel que, si $|u - u_0| < \tau_1$, le jacobien J est $\neq 0$, quel que soit λ, μ, et $(M_0, u_0) \in R'$, donc la transformation

$$H(M_0, u_0) P = M_0$$

est une homéomorphie au voisinage de M et, comme, dans cette transformation, les lieux de M correspondent aux sphères concentriques de rayon $\frac{u - u_0|}{F(o)}$, le théorème en résulte immédiatement, puisque J est continu et différent de zéro.

3. De la démonstration précédente résulte également que, *étant donné* R', *il existe d telle que, si* $|M_0 M_1 < d$, *à tout point* M *il correspond un seul point* P, *si l'on impose à u d'être* $> u_0$ (*ou* $< u_0$) *et tel que* $u - u_0|$ *soit* $< \tau_1$, τ_1 *ayant le même sens que plus haut, u étant déterminé par* P. *Ce qui détermine une fonction uniforme u*(M) *que nous appellerons*

$$\mathfrak{U}(u_0, M_0, M) \left(\mathfrak{V}(u_0, M_0, M) \right).$$

Théorème. -- *Les fonctions* $\mathfrak{U}(u_0, M_0, M) \left(\mathfrak{V}(u_0, M_0, M) \right)$, *que nous venons de définir, constituent une intégrale complète semi-paratingente supérieure* (*inférieure*) *pour* $u = u_0$, *si* $|u - u_0| < \tau_1$, *quel que soit* $(u_0, M_0) \in R'$.

Démonstration. — En effet, $\mathfrak{U}(u_0, M_0, M) \left(\text{ou } \mathfrak{V}(u_0, M_0, M) \right)$ définit, dans l'espace x, y, z, u, une surface avec un paratingent continu, défini, en chaque point, par le paratingent de la surface de niveau en ce point et par le vecteur $\vec{M}_0$, donc, $\overrightarrow{\text{Grad}(u)}$ est continu. D'autre part,

$$\vec{M}'_u = \frac{\vec{h}}{F(o)}$$

montre que les courbes $\mathcal{C}$ sont tangentes au cône élémentaire de (1), donc les fonctions considérées sont des intégrales de (1) et constituent des intégrales semi-paratingentes de 1 en $u = u_0$.

Enfin, les courbes $\mathcal{C}$ sont les seules trajectoires orthogonales aux surfaces $\mathfrak{U} = \text{const.}$ et $\mathfrak{V} = \text{const.}$, car le vecteur $\vec{h}$ est une fonction dérivable de x, y, z. En effet, si $|MM_0|$ est assez petit, u et $\vec{h}_0$ sont fonction dérivable de M (comme P), donc $\vec{h}$ est une fonction dérivable de M. Toute courbe $\mathcal{C}$ étant déterminée par u_0, $\vec{h}_0$, M_0 et tout point (M_0, u_0) de R appartenant à une région $R' \subset R$, les intégrales

$$\mathfrak{U}(u_0, M_0, M) \quad \text{et} \quad \mathfrak{V}(u_0, M_0, M)$$

constituent respectivement des intégrales complètes semi-paratingentes supérieures et inférieures en $u = u_0$ dans R.

4. Les théorèmes des paragraphes III.3 et II.2 montrent que :

Théorème. — *Si u est une intégrale paratingente de* (1) *dans un certain domaine* R, *elle est, dans toute sous-région, enveloppe des* $\mathfrak{U}(u_0, M_0, M)$ [*et des* $\mathfrak{V}(u_0, M_0, M)$] *pour* $u > u_0$ (*et pour* $u < u_0$), *si* $|u - u_0| < \eta_1$ (η_1 *correspondant à cette sous-région*), *lorsque* M_0 *parcourt la surface* (u_0), *dans cette sous-région.*

Remarque. — Dans toute la suite, le nombre η_1 aura le sens que l'on vient de lui donner.

IV. — Propriétés et détermination des intégrales paratingentes de 1 dans R.

1. Nous allons prouver que, *toute surface de niveau* (u) *d'une intégrale paratingente de* (1) *est, dans* $R(u)$, *à courbure bornée, et que, réciproquement, toute portion de surface à courbure bornée dans* $R(u_0)$ *est, dans* $R(u_0)$, *surface de niveau d'une intégrale paratingente de* (1), *qui est déterminée d'une façon unique.* Nous allons commencer par étudier les rayons de courbure des surfaces de niveau des intégrales semi-paratingentes déterminées ci-dessus, et prouver que, dans toute région $R' \subset R$, il existe η_{11} tel que, si $|u - u_0| < \eta_{11}$, $(M_0, u_0) \in R'$, alors les sphères, tangentes au point M à la surface

$$\mathfrak{U}(M_0, u_0, u) = u\big(\mathfrak{V}(M_0, u_0, u) = u\big),$$

et de rayon respectif $A(u - u_0)$ et $B(u - u_0)$, sont contenues dans cette surface et contiennent cette surface respectivement, et n'ont avec cette surface que M en commun (A et B étant deux quantités > 0).

2. Les surfaces de niveau des intégrales semi-paratingentes étant des S_2, nous allons utiliser la formule d'Olinde Rodrigues

$$d\vec{M} + \rho\, d\vec{h} = 0$$

pour calculer les rayons de courbure ρ. M, sur la surface (u), est fonction de λ et μ (paramètres de $\vec{h}_0$); suivant le raisonnement fait au paragraphe III.2 :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} = \left(\frac{\vec{h}_0}{F(o)} + \alpha_1\right)(u - u_0), \qquad \left(\frac{\vec{h}_0}{F(o)} + \alpha_2\right)(u - u_0) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu},$$

où α_1 et $\alpha_2 \to o$, uniformément, quel que soit $(M_0, u_0) \in R'$ et $\vec{h}_0$, si $u \to u_0$,

$$d\vec{M} = \left(\frac{d\vec{h}_0}{F(o)} + \alpha_1 d\lambda + \alpha_2 d\mu\right)(u - u_0);$$

d'autre part,

$$\vec{h} = \vec{h}_0 + \int_{u_0}^{u} \left(\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h}\right) \wedge \vec{h}\right) du,$$

d'où

$$d\vec{h} = d\vec{h}_0 + \int_{u_0}^{u} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h}\right) \wedge \vec{h}\right)\right) d\lambda + \left(\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h}\right) \wedge \vec{h}\right)\right) d\mu \right] du;$$

or,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h}\right) \wedge \vec{h}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h}\right) \wedge \vec{h}\right)$$

sont, si $|u - u_0|$ est assez petit, une fonction continue de u, u_0, x_0, y_0, z_0, λ, μ et, comme le champ des variables est, si on le veut, un ensemble compact, ces deux fonctions restent inférieures à un nombre K, quel que soit λ et μ et $(M_0, u_0) \in R'$; d'où

$$d\vec{h} = d\vec{h}_0 + \beta_1 d\lambda + \beta_2 d\mu,$$

où β_1 et $\beta_2 \to o$, uniformément si $u \to u_0$.

Alors la quantité

$$\frac{-(d\vec{M})^2}{d\vec{M}.d\vec{h}} = -\frac{\left(\frac{(d\vec{h}_0)^2}{(F(o))^2} + a_1 d\lambda^2 + 2b_1 d\mu\, d\lambda + c_1 d\mu^2\right)}{\left(\frac{(d\vec{h}_0)^2}{F(o)} + d_1 d\lambda^2 + 2e_1 d\mu\, d\lambda + f_1 d\mu^2\right)}(u - u_0).$$

Or, λ et μ sont des paramètres de la sphère de rayon 1, donc on peut les choisir tels que

$$\left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)^2 < 1 \qquad \text{si} \quad d\sigma^2 = (d\vec{h}_0)^2;$$

$$\frac{-(d\vec{M})^2}{d\vec{M}.d\vec{h}} = -\frac{1}{F(o)} \frac{\left(1 + a\left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 + 2b\frac{d\lambda\, d\mu}{d\sigma^2} + c\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)^2\right)}{\left(1 + d\left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 + 2e\frac{d\lambda\, d\mu}{d\sigma^2} + f\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)^2\right)}(u - u_0),$$

où $a, b, c, d, e, f \to 0$, uniformément, si $u \to u_0$; donc

$$\frac{-\left(d\vec{M}\right)^2}{d\vec{M}.d\vec{h}} = \frac{1}{F(0)}(1+\varepsilon')(u-u_0),$$

où $\varepsilon' \to 0$ uniformément.

Or, les rayons de courbure de (u) dans une des intégrales semi-paratingentes sont de cette forme. Donc, en particulier, si $|u-u_0|$ est suffisamment petit, les deux rayons de courbure sont de même signe (signe de $u-u_0$). Les surfaces de niveau sont donc convexes; de plus, en valeur absolue, ils sont inférieurs à $\frac{1}{F_m}(1+1)(|u-u_0|)$ et supérieurs à $\frac{1}{F_M}\left(1-\frac{1}{2}\right)(|u-u_0|)$, où (F_m) et (F_M) sont les maximum et minimum de F dans R'.

Donc, si l'on pose

$$A=\frac{1}{2F_M} \quad \text{et} \quad B=\frac{2}{F_m},$$

étant donné R', il existe $\eta_1 < \eta$ tel que les surfaces (u) des intégrales semi-paratingentes aient leurs rayons de courbure du même signe (celui de u_0-u) et soient, en valeur absolue, compris entre $A(|u-u_0|)$ et $B(|u-u_0|)$, quel que soit $(M_0, u_0)\in R'$, si $|u-u_0| < \eta_1$.

Donc, *la sphère de rayon* $(|u-u_0|)$, *tangente à la surface* (u) *du même côté que* M, *au point* M, *est intérieure à cette surface et la sphère de rayon* $B(|u-u_0|)$, *tangente en* M *et qui contient la première sphère, contient* (u) *et n'a en commun avec elle que le point* M.

3. Théorème. — *Si u est une intégrale paratingente de* (1), *dans* R, (u) *est à courbure bornée dans* $R(u)$ *et, par conséquent, à courbure uniformément bornée dans* $R''(u)$, *où* R'' *est fermée* $\subset$ R.

Démonstration. — En effet, soit $M\in(u)$; on peut choisir R' fermée $\subset$ R, telle que (M, u) soit intérieur à R'; il existe, alors, $\eta_2 < \eta_1$, tel que, si $|u-u_0| < \eta_2$, (M, u_0) est intérieur à R'. M_0 et M étant sur la même courbe $\mathcal{C}$. Si S_0 est l'intérieur de $(u_0)\cap R'(u_0)$, $M_0\in S_0$, soit $M'_0\in S_0$ et M' le point correspondant sur la même courbe $\mathcal{C}$. Je dis que $\mathfrak{U}(M'_0, u_0, u)\left(\mathfrak{V}(M'_0, u_0, u)\right)$, si $u > u_0$ (si $u < u_0$), est telle que sa surface de niveau

$$\mathfrak{U}(M'_0, u_0, u) = u\left(\mathfrak{V}(M'_0, u_0, u) = u\right)$$

ne contient à son intérieur, ni sur sa surface, aucun point de (u), sauf M'.

Supposons le contraire : Soit M'' un point de (u) à l'intérieur ou sur la surface de niveau de l'intégrale paratingente et $\mathcal{C}'$ la courbe $\mathcal{C}$ passant en M'_0, pour la valeur u_0, et en M''. En M'', la valeur du paramètre est $u' \leq u$; mais $\mathcal{C}'$

n'est pas orthogonale (tout au moins en M_0) aux surfaces (u), donc $u < u'$, d'après la propriété minimale des courbes $\mathcal{C}$, il y a contradiction. Donc, la sphère de rayon $A(u-u_0)$, tangente en M', ne contient aucun point de (u), sauf M'. Et ceci est valable, quel que soit $M' \in S$, correspondant à S_0 sur (u).

Donc, la surface (u) est à courbure bornée sur S et, par conséquent, d'après le lemme de Borel-Lebesgue, à courbure uniformément bornée dans tout $R''(u)$, si R'' est fermée $\subset R$.

4. Théorème réciproque. — *Si* S *est une surface paratingente à courbure bornée dans* $R(u_0)$ *dans toute région* $R' \subset R$, $R'(u_0) \cap S$ *est surface de niveau d'une intégrale paratingente de* (1), *pour* $|u-u_0|$ *suffisamment petit, intégrale qui est déterminée d'une façon unique.*

Démonstration. — Soit R' fermée $\subset R$ et $S \cap R'(u_0) = S_0$ et u tel que $|u-u_0| \leq \tau_{i2} < \tau_{i1}$ tel que $S \cap R'(u_0)$ possède la propriété $P(B\tau_{i2})$, c'est-à-dire que les sphères de rayon $B\tau_{i2}$ tangente ne contiennent à leur intérieur ou sur leur surface aucun point de $S \cap R(u_0)$ autre que le point de contact. Considérons l'ensemble E des points (M, u) définis de la façon suivante :

En tout point M_0 de $S \cap R'(u_0)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$, normale en M, pour la valeur u du paramètre et M est le point de paramètre u sur $\mathcal{C}$, tel que $|u-u_0| < \tau_{i2}$.

L'ensemble des points (M, u) est contenu dans R et est fermé. En effet, la correspondance $(M_0, u) \to (M, u)$ est continue et est définie sur le compact $S \cap R'(u_0) \times (u-\tau_{i2}, u+\tau_{i2})$, elle est donc fermée, donc E est fermé; donc, il existe R'' fermée $\in R$, qui contient E et R'; et soit $\tau'_{i2} < \tau_{i2}$, satisfaisant à l'énoncé du 2 pour R'', et E' l'ensemble des points (M, u) correspondant à (M_0, u), $M_0 \in S \cap R'(u_0) \times |u-u_0| < \tau'_{i2}$. Montrons que la correspondance est biunivoque : supposons le contraire, supposons, en outre, qu'il existe deux valeurs u_1 et u'_1, associées à un même point M telles que $(M_1, u_1) \in E'$ et $(M_1, u'_1) \in E'$, il existe donc M_0 et M'_0, appartenant à $S \cap R'(u_0)$, et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passant par M_0 et M'_0 pour la valeur u_0 du paramètre et en M_1 respectivement pour u_1 et u'_1; supposons $u'_1 \leq u_1$ (et, par exemple, u_1 et $u'_1 > u_0$), la sphère de rayon $B|u_1-u_0|$ tangente en M_0 à S, du même côté que M_1, laissant tous les points de la surface, sauf M_0, à son extérieur, la surface $\mathfrak{V}(u_1, M_1, u) = u_0$ passe par M_0 et laisse M'_0 à son extérieur. Considérons, le long de $\mathcal{C}'$, la solution de

$$\frac{dT}{ds} = F(M, T), \tag{3}$$

telle que $T = u_1$, en M_1 : comme M'_0 est à l'extérieur de $\mathfrak{V}(u_1, M_1, u) = u_0$, et comme $\mathcal{C}'$ n'est pas forcément orthogonale aux surfaces de niveau de $\mathfrak{V}$, la

valeur de cette solution en M'_0 est $u'_0 < u_0$; alors que la solution de la même équation, prenant la valeur u'_1 en M_1, a la valeur u_0, avec $u'_1 \leq u_1$, ce qui est impossible, étant donné que l'équation (3) a ses solutions déterminées par les conditions initiales.

Donc M est tel que $(M_1, u_1) \in E'$ pour une seule valeur de u et ne correspond qu'à un point M_0.

La correspondance $(M_0, u) \to (M, u)$ est continue, fermée, biunivoque, donc c'est une homéomorphie et l'ensemble E', image de la surface $S \cap R'(u_0) \times (u - \gamma_{12}, u + \gamma_{12})$ de l'espace x, y, z, u, est une surface dans cet espace.

Donc, au voisinage de $S \cap R'(u_0)$, la fonction $u(M)$ définie par cette surface est uniforme et continue et, de plus, les surfaces de niveau, image bicontinue des surfaces $S \cap R'(u_0)\{u\}$ de l'espace x, y, z, sont aussi des surfaces de cet espace, en ce sens que, s'il existe un paratingent plan, ce paratingent contient toutes les directions du plan (pour un point intérieur).

Montrons, enfin, que ces surfaces ont un paratingent plan perpendiculaire, en chaque point au vecteur $\vec{h}$ à la courbe $\mathcal{C}$ qui y passe; supposons ceci inexact en (M_1, u_1), correspondant à (M_0, u_0), il existe donc une suite de points M'_i, M''_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, telle que le vecteur $\overrightarrow{M'_i M''_i}$ fasse, avec $\vec{h}_1$ en M_1, un angle tendant vers un angle aigu; comme le vecteur $\vec{h}''_i$ (en M''_i) tend vers $\vec{h}_1$, l'angle $(\overrightarrow{M'_i M''_i}, \vec{h}''_i)$ est aigu, à partir d'une certaine valeur de i et, comme $M'_i M''_i \to 0$ et que les rayons de courbure de

$$\mathfrak{U}(M''_{0i}, u_0, u) = u_1\big((\mathfrak{U}_1)\big)$$

restent $> A(|u - u_0|)$, à partir d'un certain i, M'_i est à l'intérieur de cette surface. Il passe alors une courbe $\mathcal{C}'$ par M''_{0i}, pour la valeur u_0, et en M'_i; comme M'_i est à l'intérieur de $(\mathfrak{U}_1)$, M'_i est atteint pour une valeur $u'_1 < u_1$ du paramètre [c'est une solution de l'équation (3)]. Or, $\mathfrak{V}(M_1, U_1, u) = u_0$ laisse M''_{0i} à son extérieur et, d'après la démonstration précédente, ceci est impossible.

D'où, en chaque point M des surfaces (u), il existe un paratingent plan perpendiculaire à $\vec{h}$, tangent à la courbe $\mathcal{C}$. Donc, la fonction $u(M)$ est intégrale paratingente de (1) et, comme toute solution de (1) est obtenue de cette manière, la solution est unique.

Remarque. — Un point quelconque de R pouvant se trouver dans une région R', contenue dans R, *on peut prolonger la solution de telle sorte que* $S \cap R(u_0)$ *soit entièrement utilisée* et, il est alors immédiat que l'*on peut définir la solution en tout point de* R. *Il existe des solutions paratingentes en tout point de* R.

CHAPITRE II.

SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX PARATINGENTS ET FAMILLES DE LAMÉ PARATINGENTES VÉRIFIANT CERTAINES CONDITIONS.

1. — Familles de Lamé, formées à partir d'une solution de l'équation (1).

1. Soit, alors, une intégrale paratingente dans R de (1), qui définit une famille de Lamé. Étant données les hypothèses, si v et w sont les deux fonctions complémentaires, M sur une surface (u) est une fonction dérivable de v et w, soit $M_0(v, w)$ et $M(v, w)$ qui se correspondent sur la même courbe $\mathcal{C}$, pour les valeurs u et u_0

$$M = M\left(u, u_0, M_0(v, w), \vec{h}_0\right);$$

la dérivation formelle donne

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial v} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial v} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial v} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial v}$$

comme

$$\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu}\right) = 0, \qquad \text{si} \quad u - u_0 < \eta, \; u' \neq u_0,$$

cette équation peut se résoudre en $\frac{\partial \lambda}{\partial v}$ et $\frac{\partial \mu}{\partial v}$; donc $\vec{h}_0$ est dérivable par rapport à v et w. Donc les surfaces de niveau sont des S_2.

Théorème. — *Si u est une intégrale paratingente de* (1) *et définit une F. L. P., les surfaces* (u) *sont des* S_2, *à courbure bornée* (*phénomène de superdérivabilité*).

Remarque. — M. Ilensa, dans le cas où

$$F(M, u) = \frac{1}{S(M, u)},$$

démontre la réciproque sous cette forme :

Toute S_2 à courbure bornée et possédant un réseau de lignes de courbure orthogonal, est surface de niveau (dans R) d'une F. L. P. définie par une intégrale de (1). Il ne nous est pas possible d'étendre ce résultat, puisqu'il n'est pas vrai dans le cas classique.

2. Soit un S. T. O. P. dont deux des systèmes de surfaces sont définies par des intégrales d'équations du type (1), u et v, soit $\vec{h}$, $\vec{k}$, $\vec{l}$ les vecteurs normaux

respectifs, $\vec{h}$ et $\vec{k}$ sont dérivables par rapport à u, v, w, donc $\vec{l}$ également, le troisième système est donc formé de S_2. De plus,

$$\vec{M}'_u = \frac{\vec{h}}{F(M, u)}, \qquad \vec{M}'_v = \frac{\vec{k}}{G(M, u)},$$

d'où M''_{uv} et M''_{uw} et M''_{vw}, existent et sont continues, donc $M''_{uv} = M''_{vu}$, ... et, comme la démonstration du théorème de Dupin repose uniquement sur ces égalités nous avons :

Les surfaces du S. T. O. P. se coupent suivant leurs lignes de courbure.

Remarque. — Il resterait à prouver qu'il existe de telles F. L. P., non classiques, en dehors du cas approfondi par M. Llensa.

II. — Familles de Lamé faisant partie d'une famille plus étendue de surfaces sous certaines conditions de dérivabilité.

1. *Soit une F. L. P. qui, dans un certain domaine* R *de l'espace* x, y, z, *est soumise aux hypothèses suivantes :*

Elle fait partie d'une famille de surfaces, soit $\mathcal{F}$, *dépendant d'un nombre fini de paramètres,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *chacune des surfaces de la famille* $\mathcal{F}$ *étant paramétrée, dans* R, *de telle sorte que, si*

$$M = M(\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{1}$$

représente l'équation de cette surface, les dérivées

$$\vec{M}''_{\alpha^2}, \quad \vec{M}''_{\beta^2}, \quad \vec{M}''_{\alpha\beta}, \quad \vec{M}''_{\alpha\lambda_k}, \quad \vec{M}''_{\beta\lambda_k},$$

soient continues par rapport à leurs arguments; dans R, *les surfaces de la F. L. P. sont régulièrement paramétrées, c'est-à-dire que*

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \beta} \neq 0;$$

enfin au voisinage de chaque surface de la F. L. P. les paramètres sont essentiels, la surface n'est pas stationnaire, si l'on donne aux paramètres λ_k *des accroissements différentiels liés par moins de* n *relations linéaires indépendantes.*

Nous dirons qu'alors, la F. L. P. est *régulière* dans $\mathcal{F}$.

2. Étant données les hypothèses, on peut éliminer α et β dans les équations (1) et mettre l'équation générale de la famille $\mathcal{F}$ sous la forme

$$F(x, y, z, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0,$$

F possédant ses dérivées premières continues. Dans R, soit v et w les deux fonctions définissant les deux autres familles de surfaces du S. T. O. P., on peut remplacer x, y, z par u, v, w et la famille est donnée par

$$G(u, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0,$$

possédant ses dérivées premières continues.

Par hypothèse, étant donné u, il existe $\lambda_k(u)$, $1 \leq k \leq n$, tels que

$$G\big(u, v, w, \lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u)\big) = 0$$

soit une identité en u, v, w; ce sont les valeurs qui déterminent la surface (u) de la F. L. P. Je dis que l'on peut choisir n points M_i, $1 \leq i \leq n$, sur (u) tels que le déterminant

$$\frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial G\big(u, v_i, w_i, \lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u)\big)}{\partial \lambda_k}$$

soit $\neq 0$ pour les valeurs $\lambda_k(u)$ des paramètres; en effet, toutes les dérivées ne peuvent être nulles, car alors la surface (u) serait stationnaire; supposons que le rang du déterminant soit inférieur à n quels que soient les points M_i et soit p son son rang maximum, il existe donc $M_1, M_2, \ldots, M_p$ tels que

$$\left(\frac{\partial G_i}{\partial \lambda_{k_j}}\right) \neq 0,$$

$k_1, \ldots, k_p$ étant p indices k des λ; alors quel que soit M sur la surface (u) (si l'on fait varier les λ)

$$dG(M, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = a_1\, dG_1 + \ldots + a_p\, dG_p, \qquad \text{avec } p < n,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Donc le déterminant

$$\left(\frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k}\right) \neq 0,$$

pour n points M_i, $1 \leq i \leq n$.

3. Dans ces conditions les $\lambda_k(u)$ sont dérivables; en effet, dérivons formellement les n identités

$$G\big(u, v_i, w_i, \lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u)\big) = 0,$$

où u, v_i, w_i sont les coordonnées de M_i, par rapport à u

$$\frac{\partial G_i}{\partial u} + \sum_k \frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k} \frac{d\lambda_k}{du} = 0, \tag{5}$$

comme les M_i sont choisis de telle sorte que le déterminant

$$\left(\frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k}\right) \quad \text{soit} \neq 0$$

on peut résoudre le système (5) par rapport aux $\frac{d\lambda_k}{du}$, qui existent donc et sont fonctions continues de u, dans R.

Si nous revenons à (4), système qui peut se résoudre par rapport à α et β, nous voyons que α et β sont des fonctions continuement dérivables de u, v, w. Et alors

$$M = M\big(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u)\big) \tag{6}$$

représente la transformation orthogonale définie par le S. T. O. P.

$$M = M(u, v, w).$$

4. Les trajectoires orthogonales aux surfaces de la F. L. P. ont pour tangentes, en chaque point, le vecteur

$$\vec{h} = \frac{\vec{M}'_\alpha \wedge \vec{M}'_\beta}{\left|\vec{M}'_\alpha \wedge \vec{M}'_\beta\right|}$$

qui, puisque les dérivées secondes M''_{α^2}, M''_{β^2}, $M''_{\alpha\beta}$, $M''_{\alpha\lambda_k}$ existent et sont continues, est continuement dérivable en u.

Alors

$$\left|\vec{h}'_u\right| = \frac{1}{\rho(u)}\frac{ds}{du} = \frac{1}{\rho(u)}\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\right|$$

et, comme $\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\right|$ est $\neq 0$, $\frac{1}{\rho(u)}$ est une fonction continue de u, ainsi que le vecteur normal principal $\rho_u \vec{h}'_u \frac{du}{ds}$, qui est le vecteur dirigeant de $\vec{h}'_u$, est aussi une fonction continue de u.

C'est en ce sens que nous dirons que la courbe admet un cercle de courbure continu, le rayon de celui-ci pouvant devenir infini, mais ne s'annulant pas, dans R *la courbe est à courbure bornée.*

Remarque. — Il n'est pas indispensable de supposer l'existence des dérivées secondes de M; *il suffit de supposer que le vecteur* $\vec{h}$ *normal à la surface générale de la famille* $\mathfrak{F}$ *est fonction continuement dérivable des paramètres* α, β, λ_k. On peut en déduire, par exemple, que les courbes $\mathcal{C}$ du paragraphe précédent sont à rayon de courbure continu.

III. — Familles de Lamé dont les trajectoires orthogonales font partie d'une famille de courbes sous certaines conditions de dérivabilité.

1. *Soit une F. L. P. qui, dans un certain domaine* R *de l'espace* x, y, z, *est soumise aux hypothèses suivantes :*

Les trajectoires orthogonales $\mathcal{C}$ *des surfaces de la famille font partie d'une*

famille $\mathfrak{F}$ *de courbes, dépendant d'un nombre fini de paramètres* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *chaque courbe de la famille étant paramétrée, dans* R, *de telle sorte que, si*

$$M = M(0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{7}$$

représente l'équation de cette courbe, les dérivées $\vec{M}''_{0_k}$, $\vec{M}''_{0_{kk}}$ *soient continues par rapport à leurs arguments; dans* R *les courbes* $\mathcal{C}$ *sont régulièrement paramétrées, c'est-à-dire que* $\vec{M}'_0$ *est* $\neq 0$; *enfin, au voisinage de chaque courbe* $\mathcal{C}$, *les paramètres sont essentiels* (même définition que pour les surfaces au paragraphe précédent).

Alors *les surfaces* (u) *sont à courbure bornée, dans* R.

2. Dans R, si v et w sont les deux fonctions définissant les deux autres familles du S. T. O. P., le système (2) peut être remplacé par

$$\mu = \mu(0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{8}$$

où μ, point de coordonnées u, v, w, est fonction continuement dérivable de ses arguments. Par hypothèse, on peut éliminer θ entre les équations du système (8), de telle sorte que le résultat de l'élimination se mette sous la forme

$$\begin{aligned} F(u, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) &= 0, \\ G(u, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) &= 0, \end{aligned}$$

où F et G sont continuement dérivables par rapport à leurs arguments.

Par hypothèse, étant donnés v et w, il existe $\lambda_k(v, w)$, $1 \leq k \leq n$, tels que

$$\begin{cases} F\big(u, v, w, \lambda_1(v, w), \ldots, \lambda_n(v, w)\big) = 0, \\ G\big(u, v, w, \lambda_1(v, w), \ldots, \lambda_n(v, w)\big) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

soient des identités en u, v, w; ce sont les valeurs qui déterminent les courbes.

Je dis que, étant donnés v et w, on peut choisir n points M_i, de paramètres u_i, $1 \leq i \leq n$, tels que le tableau formé avec les dérivées

$$\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial F(u_i, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\partial \lambda_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial G(u_i, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\partial \lambda_k}$$

soit de rang n [pour les valeurs $\lambda_k(v, w)$ des paramètres λ]; toutes ces dérivées ne peuvent être nulles, puisque $\mathcal{C}$ n'est pas stationnaire; supposons que le rang du tableau soit, au maximum, $p < n$, il existe donc $M_1, M_2, \ldots, M_p$ pour des valeurs de $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p$ tels qu'on peut extraire du tableau un déterminant non nul de rang p où interviennent des dérivées partielles de F ou G pour les valeurs précédentes des u par rapport à p des paramètres $\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_p}$ ($k_1, k_2, \ldots, k_p$ étant p des indices des λ); tout déterminant de rang $> p$ étant nul, quel que soit u,

$$dF(u, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \text{et} \quad dG(u, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

est combinaison linéaire des différentiels des F_i et des G_i qui interviennent dans le déterminant non nul; ce qui contredit l'hypothèse.

Donc on peut trouver n valeur de u tel que le tableau soit de rang n.

3. Si l'on dérive formellement les identités obtenues en v et w en remplaçant dans (9) u successivement les n valeurs précédentes, le tableau précédent est le tableau des coefficients $\frac{\partial \lambda_k}{\partial v}$, $\frac{\partial \lambda_k}{\partial w}$; donc on peut résoudre le système par rapport à ces dérivées et les fonctions $\lambda_k(v, w)$ sont fonctions continuement dérivables de v et w.

Mais, alors, le système (8) peut être résolu en 0 et, puisque M'_0 est $\neq 0$, 0 est continuement dérivable de u, v, w.

$$M = \vec{M}\big(0(u, v, w), \lambda_1(v, w), \ldots, \lambda_n(v, w)\big)$$

représente la transformation

$$M = M(u, v, w).$$

4. Le vecteur normal à la surface (u) est le vecteur $\vec{h} = \frac{\vec{M}'_0}{|M'_0|}$ et, étant donné que M''_{0^2}, $M''_{0\lambda_k}$ sont continues pour leurs arguments, ainsi que $\lambda_k(v, w)$ pour v et w, ce vecteur est continuement dérivable pour v et w. *Donc les surfaces* (u) *sont des* S_2.

De plus, l'équation qui donne les rayons de courbure s'écrit

$$\frac{(\vec{M}'_v)^2(\vec{M}'_w)^2}{(\rho(u))^2} + \frac{1}{\rho(u)}\left[(\vec{M}'_v)^2(\vec{h}'_w \cdot \vec{M}'_w) + (\vec{M}'_w)^2(\vec{h}'_v \cdot \vec{M}'_v)\right] - (\vec{h}'_v \cdot \vec{M}''_w)(\vec{h}'_w \cdot \vec{M}'_v) = 0$$

et, comme M'_v et M'_w sont $\neq 0$ dans R, les rayons de courbure ne sont jamais nuls.

Donc *les surfaces* (u) *sont à courbure bornée, dans* R.

Remarque. — Les courbes $\mathcal{C}$ du paragraphe 1 vérifient les hypothèses posées au début de ce paragraphe et la démonstration, alors donnée, se ramène aisément à celle-ci.

IV. — Lignes de courbure.

1. Dans les cas traités aux trois paragraphes précédents, les dérivées M''_{uv} *et* M''_{uw} *existent et sont continues* (*donc égales à* M''_{vu} *et* M''_{wu} *respectivement*).

En effet, dans le premier cas,

$$M'_u = \frac{\vec{h}}{F(M, u)}$$

est continuement dérivable par rapport à v et w, puisque h et M le sont.

Dans le deuxième cas,

$$M = M\big(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u)\big)$$

et

$$\vec{M}'_u = \vec{M}'_\alpha \alpha'_u + \vec{M}'_\beta \beta'_u + \vec{M}'_{\lambda_1} \lambda'_{1u} + \ldots + \vec{M}'_{\lambda_n} \lambda'_{nu};$$

comme

$$\vec{M}'_u . \vec{M}'_\alpha = \vec{M}'_u . \vec{M}'_\beta = 0,$$

donc

$$0 = \big(\vec{M}'_\alpha\big)^2 \alpha'_u + \big(\vec{M}'_\alpha . \vec{M}'_\beta\big)\beta'_u + \big(\vec{M}'_\alpha . \vec{M}'_{\lambda_1}\big)\lambda'_{1u} + \ldots + \big(\vec{M}'_\alpha . \vec{M}'_{\lambda_n}\big)\lambda'_{nu},$$
$$0 = \big(\vec{M}'_\alpha . \vec{M}'_\beta\big)\alpha'_u + \big(\vec{M}'_\beta\big)^2 \beta'_u + \big(\vec{M}'_\beta . \vec{M}'_{\lambda_1}\big)\lambda'_{1u} + \ldots + \big(\vec{M}'_\beta . \vec{M}'_{\lambda_n}\big)\lambda'_{nu}.$$

$\vec{M}'_\alpha \wedge \vec{M}'_\beta$ étant $\neq 0$, on peut résoudre par rapport à α'_u et β'_u. Donc des deux fonctions sont dérivables par rapport à v et w, puisque

$$\vec{M}''_{\alpha^2}, \quad \vec{M}''_{\alpha\beta}, \quad \vec{M}''_{\beta^2}, \quad \vec{M}''_{\alpha\lambda_k}, \quad \vec{M}''_{\beta\lambda_k},$$

existent et sont continues, d'où

$$\alpha''_{uv} \quad \text{et} \quad \alpha''_{uw}$$

existent et sont continues; donc M'_u est dérivable continuement par rapport à v et w.

Dans le troisième cas,

$$M = M\big(\theta(u, v, w), \lambda_1(v, w), \ldots, \lambda_n(v, w)\big);$$

donc

$$\vec{M}'_v = \vec{M}'_\theta \theta'_v + \vec{M}'_{\lambda_1} \lambda'_{1v} + \ldots + \vec{M}'_{\lambda_n} \lambda'_{nv} \qquad \text{or} \qquad \vec{M}'_v . \vec{M}'_\theta = 0,$$

d'où

$$0 = \big(\vec{M}'_\theta\big)^2 \theta'_v + \big(\vec{M}'_\theta . \vec{M}'_{\lambda_1}\big)\lambda'_{1v} + \ldots + \big(\vec{M}'_\theta . \vec{M}'_{\lambda_n}\big)\lambda'_{nv};$$

M'_θ étant $\neq 0$, on peut résoudre par rapport à θ'_v et, comme M''_{θ^2} et $M''_{\theta\lambda_n}$ existent et sont continues, θ'_v est continuement dérivable par rapport à u. Donc M'_v est continuement dérivable par rapport à u, de même M'_w.

2. *Supposons donc* M''_{uv} *et* M''_{uw}, *fonctions continues de* u, v, w, *et étudions les autres dérivées croisées.*

Considérons l'expression suivante :

$$F(\Delta v, \Delta w) = \vec{h}(v, w).\left[\frac{\vec{M}(v + \Delta v, w + \Delta w) - M(v + \Delta v, w) - M(v, w + \Delta w) + M(u, v)}{\Delta v \, \Delta w}\right]$$

considérée comme fonction de Δv et Δw, soit d'autre part les deux expressions suivantes :

$$G(\Delta w) = \vec{h}(v, w).[M(v + \Delta v, w + \Delta w) - M(v, w + \Delta w)]$$

et

$$H(\Delta v) = \vec{h}(v, w).[M(v + \Delta v, w + \Delta w) - M(v + \Delta w, w)],$$

considérées comme fonctions respectives de Δw et Δv, on a alors les égalités

$$\begin{aligned} F(\Delta v, \Delta w) &= \frac{G(\Delta w) - G(o)}{\Delta v \Delta w} = \frac{1}{\Delta v} G'(\theta \Delta w) = \frac{H(\Delta v) - H(o)}{\Delta v \Delta w} = \frac{1}{\Delta w} H'_w(\theta' \Delta v) \\ &= \vec{h}(v, w).\left[\vec{M}'_w(v + \Delta v, w + \theta \Delta w) - \vec{M}'_w(v, w + \theta \Delta w)\right]\frac{1}{\Delta v} \\ &= \vec{h}(v, w).\left[\vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w) - \vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w)\right]\frac{1}{\Delta w}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons les identités

$$\vec{h}.\vec{M}'_v = o \qquad \text{et} \qquad \vec{h}.\vec{M}'_w = o;$$

par conséquent

$$\vec{h}(v + \Delta v, w + \theta \Delta w).\vec{M}'_w(v + \Delta v, w + \theta \Delta w) - \vec{h}(v, w + \theta \Delta w).\vec{M}'_w(v, w + \theta \Delta w) = o,$$

$$\vec{h}(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w).\vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w) - \vec{h}(v + \theta' \Delta v, w).\vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w) = o,$$

ou encore

$$\left[\frac{\vec{h}(v + \Delta v, w + \theta \Delta w) - \vec{h}(v, w + \theta \Delta w)}{\Delta v}\right].[\vec{M}'_w(v + \Delta v, w + \theta \Delta w)]$$
$$+ \vec{h}(v, w + \theta \Delta w).\left[\frac{\vec{M}'_w(v + \Delta v, w + \theta \Delta w) - \vec{M}'_w(v, w + \theta \Delta w)}{\Delta v}\right],$$

$$\left[\frac{\vec{h}(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w) - \vec{h}(v + \theta' \Delta v, w)}{\Delta w}\right].\vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w)$$
$$+ \vec{h}(v + \theta' \Delta v, w).\left[\frac{\vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w) - \vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w)}{\Delta w}\right].$$

Les premiers « monômes » des premiers membres de ces deux égalités tendent respectivement, lorsque Δv et Δw tendent vers zéro, indépendamment, vers

$$\vec{h}'_v.\vec{M}'_w \qquad \text{et} \qquad \vec{h}'_w.\vec{M}'_v,$$

donc les quantités

$$K(\Delta v, \Delta w) = \vec{h}(v, w + \theta \Delta w).\left[\frac{\vec{M}'_w(v + \Delta v, w + \theta \Delta w) - \vec{M}'_w(v, w + \theta \Delta w)}{\Delta v}\right]$$

$$L(\Delta v, \Delta w) = \vec{h}(v + \theta' \Delta v, w).\left[\frac{\vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w) - \vec{M}'(v + \theta' \Delta v, w)}{\Delta w}\right]$$

tendent, dans les mêmes conditions, respectivement vers

$$-\vec{h}'_v.\vec{M}'_w \quad \text{et} \quad -\vec{h}'_w.\vec{M}'_v,$$

les différences F — K et F — L, s'écrivent respectivement

$$-\left[\vec{h}(v, w+0\,\Delta w)-\vec{h}(v, w)\right].\left[\frac{\vec{M}'_w(v+\Delta v, w+0\,\Delta w)-\vec{M}'_w(v, w+0\,\Delta w)}{\Delta v}\right],$$

$$-\left[\vec{h}(v+0'\,\Delta v, w)-\vec{h}(v, w)\right].\left[\frac{\vec{M}'_v(v+0'\,\Delta v, w+\Delta w)-\vec{M}'_v(v+0'\,\Delta v, w)}{\Delta w}\right].$$

Supposons qu'une de ces quantités tende vers zéro, si Δv et Δw tendent vers zéro indépendamment; alors, l'autre également: supposons F — K tendant vers zéro, donc F, donc F — L tend vers une limite, si Δv et Δw tendent vers zéro indépendamment, limite qui est nulle, puisque F — L est nulle, si Δv est nul.

Donc F tend vers

$$-\vec{h}'_v.\vec{M}'_w \quad \text{et} \quad -\vec{h}'_w.\vec{M}'_v$$

qui sont donc égaux.

Or, si l'on dérive l'égalité $\vec{M}'_v.\vec{M}'_w=0$, par rapport à u, on a

$$\vec{M}''_{uv}.\vec{M}'_w+\vec{M}''_{uw}.\vec{M}'_v,$$

ou

$$\vec{h}'_v.\vec{M}'_w+\vec{h}'_w.\vec{M}'_v=0,$$

car

$$\vec{M}''_{uv}=\vec{h}'_v\left|\vec{M}'_u\right|+\vec{h}\,\frac{\partial}{\partial v}\left|\vec{M}'_u\right| \quad \text{et} \quad \vec{M}''_{uw}=\vec{h}'_w\left|\vec{M}'_u\right|+\vec{h}\,\frac{\partial}{\partial w}\left|\vec{M}'_u\right|;$$

donc, finalement,

$$\vec{M}''_{uv}.\vec{M}'_w=\vec{M}''_{uw}.\vec{M}'_v=0$$

et ces égalités signifient, en particulier, que

$$\vec{h}'_v.\vec{M}'_w=\vec{h}'_w.\vec{M}'_v=\vec{k}'_u.\vec{M}'_w=\vec{l}'_u.\vec{M}'_v=0, \tag{10}$$

si $\vec{k}$ et $\vec{l}$ sont les vecteurs normaux respectifs des surfaces $v=$ const. et $w=$ const. ($\vec{k}$ étant dérivable avec $\vec{M}'_v$, par rapport à u).

3. Si, avec M. Llensa, on appelle *ligne de courbure sur une surface paratingente, une courbe telle que la surface engendrée par la normale à* S, *s'appuyant sur la courbe, ait un même plan tangent le long d'une normale au voisinage de la courbe, alors les conditions* (10) *signifient que les lignes* $v=$ const., *et* $w=$ const. *sont lignes de courbure sur les surfaces* (u) *et que les trajectoires orthogonales à ces surfaces sont lignes de courbure sur les autres surfaces du système.*

D'où le théorème :

Si une des quantités envisagées ci-dessus tend vers zéro, avec Δv *et* Δw *(considérés comme variant indépendamment)* M'_{vv} *et* M''_{vv} *étant supposées continues, alors les surfaces* (u) *sont coupées suivant des lignes de courbure par les autres surfaces et leurs trajectoires orthogonales sont lignes de courbure sur ces autres surfaces.*

4. *L'hypothèse précédente est en particulier vérifiée si le vecteur*

$$\frac{\vec{M}'_w(v+\Delta v, w+\theta\Delta w) - M'(v, w+\theta\Delta w)}{\Delta v}$$

est borné, si Δv et Δw sont suffisamment petits, donc *si ce vecteur vérifie une condition de Lipschitz* pour v, c'est-à-dire *d'une façon précise, pour chaque valeur* (v_0, w_0), *il existe un voisinage de cette valeur et un nombre* $A > 0$, *tels que, si* (v, w) *appartient à ce voisinage et si* Δv *et* Δw *sont suffisamment petits, alors*

$$\left|\vec{M}'_w(v+\Delta v, w) - \vec{M}'_w(v, w)\right| < A\,|\Delta v|.$$

Cette condition entraîne, dans les mêmes conditions, que la quantité

$$\vec{n}.[M(v+\Delta v, w+\Delta w) - M(V, w+\Delta w) - M(v+\Delta v, w) + M(v, w)]$$

reste inférieure à $|\Delta v\,\Delta w|$, quel que soit le vecteur unitaire $\vec{n}$ (même raisonnement que pour la quantité F au n° 2). Cette quantité, à son tour, entraîne, dans les mêmes conditions, que

$$\vec{n}.\left[\vec{M}'_v(v, w+\Delta w) - \vec{M}'_v(v, w)\right] < A\,|\Delta w|,$$

quel que soit le vecteur n, *ce qui entraîne immédiatement que le vecteur* M'_v *vérifie une condition de Lipschitz par rapport à* w. *Donc le vecteur*

$$\vec{M}'_v\ \frac{(v+\theta'\Delta v, w+\Delta w) - \vec{M}'_v(v+\theta'\Delta v, w)}{\Delta w}$$

est borné.

5. Les quantités K et L du n° 2 tendant vers zéro, si Δv et Δw tendent vers zéro indépendamment,

$$\vec{h}(v, w).\left[\frac{M'_v(v, w+\Delta w) - M'(v, w)}{\Delta w}\right]$$

et

$$\vec{h}(v, w).\left[\frac{M'(v+\Delta v, w) - M'(v, w)}{\Delta v}\right]$$

tendent vers zéro.

Si l'on pose $\vec{P} = \vec{M} + \lambda \vec{M}'_w$, il en résulte que, si λ reste constant et si l'on donne à v un accroissement Δv, la quantité $\vec{h} \cdot \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta v}$ tend vers zéro, avec Δv. Or, puisque $\vec{M}'_w$ vérifie une condition de Lipschitz pour v, on peut prendre λ assez petit pour qu'aucune des limites de $\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta v}$ ne soit nulle, donc chacune des limites de la droite support de ce vecteur est perpendiculaire à $\vec{h}$. Il en résulte immédiatement que la surface engendrée par la normale à la surface $w = \text{const.}$, s'appuyant sur la courbe $u = \text{const.}$, a son plan tangent le long de $\vec{M}'_w$ perpendiculaire à $\vec{h}$, tout au moins au voisinage de la courbe.

Donc, *cette courbe est ligne de courbure de la surface* $w = \text{const.}$ *Il en est de même, pour les lignes* $u = \text{const.}$ *sur les surfaces* $v = \text{const.}$, d'après (4).

Enfin, supposer une condition de Lipschitz sur $\vec{M}'_v$, c'est supposer une condition de Lipschitz sur $\overrightarrow{\text{Grad}}(v)$. Nous énoncerons donc :

Théorème (Dupin). — *Si, dans un S. T. O. P.,* $\vec{M}''_{uv}$ *et* $\vec{M}''_{uw}$ *existent et sont continues et si* $\overrightarrow{\text{Grad}}(v)$ *(ou* $\overrightarrow{\text{Grad}}(w)$*) vérifie une condition de Lipschitz pour* w *(pour* v*), les lignes d'intersection des surfaces du S. T. O. P. sont lignes de courbure sur chacune des surfaces.*

En particulier, dans les cas traités aux paragraphes 1, 2 et 3, le résultat est valable, si une des conditions de Lipschitz citées est vérifiée.

Remarque. — La condition $M'_w \frac{(v + \Delta v, w) - \vec{M}'(v, w)}{\Delta v}$ bornée, entraîne la la même condition sur le vecteur dirigeant $\vec{l}$ de $\vec{M}'_w$ et cette condition peut s'exprimer *en disant que les lignes* $u = \text{const.}$ *sont à courbure géodésique bornée sur des surfaces* $w = \text{const.}$

Il y aurait lieu de chercher, si des conditions de ce genre, sur les courbes d'intersection des surfaces d'un S. T. O. P. (par exemple courbure géodésique bornée, d'une façon uniforme, pour les lignes d'intersection de chacune des surfaces, avec les autres surfaces du système) n'entraînent pas la validité du théorème de Dupin.

THÉORÈMES D'UNICITÉ

PAR M. S. MANDELBROJT.

Introduction.

Nous démontrons dans ce Mémoire plusieurs théorèmes d'unicité qui concernent successivement l'approximation polynomiale sur l'axe entier (en fournissant des suites fermées et complètes sur l'axe), la détermination des noyaux itérés d'une équation intégrale du type Carleman, et, enfin, différents problèmes des moments. Les démonstrations sont toutes basées sur un théorème sur les séries asymptotiques que j'ai démontré dans un Mémoire paru récemment dans ce même Recueil.

Rappel de quelques notions.

THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES.

1. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite positive croissante, et soit $N(\lambda)$ le nombre d'éléments de $\{\lambda_n\}$ inférieurs à $\lambda (\lambda > 0)$. Posons $D(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\lambda}$. Les fonctions $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont respectivement appelées fonction de distribution et fonction de densité de la suite. La fonction $D^*(\lambda) = \overline{\text{borne}}_{x \geq \lambda} D(x)$ est sa fonction de densité supérieure. C'est la plus petite fonction non croissante supérieure à $D(\lambda)$. La quantité $D^* = \overline{\lim_{\lambda = \infty}} D(\lambda) = \lim_{\lambda = \infty} D^*(\lambda)$ est la densité supérieure de $\{\lambda_n\}$. On posera $D^*(\infty) = D^*$. La fonction $\bar{D}(\lambda) = \lambda^{-1} \int_0^\lambda D(x)\, dx$ $(\lambda > 0)$ est la fonction de densité moyenne et la fonction $\bar{D}^*(\lambda) = \overline{\text{borne}}_{x \geq 0} D(x)$ est la fonction de densité moyenne supérieure de la suite. La quantité $D^* = \overline{\lim_{\lambda = \infty}} \bar{D}(\lambda) = \lim_{\lambda = \infty} \bar{D}^*(\lambda)$ est la densité moyenne supérieure de la suite. On posera $\bar{D}^*(\infty) = \bar{D}^*$. On a $\bar{D}^* \leq D^*$,

et il existe des suites pour lesquelles $D^* < D^*$ [6] (¹). Dans tout ce qui suit, $D^* < \infty$ (En réalité, les applications des théorèmes de ce Chapitre porteront uniquement sur des λ_n entiers, donc $D^* \leq 1$). La fonction

$$\nu(D) = \overline{\underset{\lambda > 0}{\text{borne}}}\,\lambda\big(D(\lambda) - D\big) = \overline{\underset{\lambda > 0}{\text{borne}}} \int_0^{\lambda} \big(D(x) - D\big)\,dx,$$

que nous définissons ici seulement pour $D \geq D^*$, est appelée fonction d'excès de la suite $\{\lambda_n\}$. Cette fonction est non négative, continue et non croissante. On posera

$$\nu(D^*) = \lim_{D \to D^*} \nu(D).$$

Comme $D^* < \infty$, les quantités

$$\Lambda_n^* = \prod_{m \neq n} \frac{\lambda_m^2}{|\lambda_n^2 - \lambda_m^2|} \qquad (n \geq 1)$$

sont positives finies. La suite $\{\Lambda_n^*\}$ est appelée suite associée à la suite $\{\lambda_n\}$.

Soit Δ un domaine du plan $s = \sigma + it$ dont l'intersection avec aucun demi-plan $\sigma > \sigma_0$ n'est vide, et soit $F(s)$ une fonction holomorphe dans Δ. Soit $\{d_n\}$ une suite de nombres réels ou complexes. Soit, enfin, $p_n(\sigma)$ une fonction définie (pour n donné) pour σ assez grand, croissante vers l'infini avec σ. L'entier n étant donné, on dit que, pour $m \geq n$ les sommes $\sum_1^m d_k e^{-\lambda_k s}$ représentent $F(s)$ dans Δ avec une précision logarithmique $p_n(\sigma)$, si pour σ suffisamment grand, s appartenant à Δ, on a

$$(1) \qquad \overline{\underset{m > n}{\text{borne}}}\ \overline{\underset{\sigma \to \infty}{\text{borne}}} \left| F(s) - \sum_{k=1}^{m} d_k e^{-\lambda_k s} \right| \cdot e^{-p_n(\sigma)} = 0.$$

On a le théorème suivant [6].

A. Soit $F(s)$ une fonction holomorphe et bornée dans un domaine Δ défini par $\sigma > c_0$, $|t| \leq \pi g(\sigma)$, où $g(\sigma)$ est une fonction continue, croissante, bornée ($\sigma > c_0$). Soit, dans Δ :

$$|F(s)| < M.$$

B. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite positive croissante, avec $D^* < \lim_{\sigma \to \infty} g(\sigma)$. Soit $\{d_n\}$ une suite telle, que, pour n donné, pour $m \geq n$, les sommes $\sum_1^m d_k e^{-\lambda_k s}$ représentent $F(s)$ dans Δ avec une précision logarithmique $p_n(\sigma)$.

(¹) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie qui se trouve à la fin du Mémoire.

C. $\nu(D)$ étant la fonction d'excès de $\{\lambda_n\}$, supposons qu'il existe une fonction continue non croissante $h(\sigma)$ avec $\lim h(\sigma) = D^*$. $\big(h(\infty) = D^*\big)$, et une fonction non décroissante $C(\sigma)$ telles que

$$(2) \qquad 2\nu[h(\sigma)] - p_n(\sigma) < -C(\sigma), \qquad \int^{\infty} C(\sigma)\, e^{\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{\pi - h(u)}}\, d\sigma = \infty.$$

Il existe alors une constante $A > 0$, et une constante réelle a, toutes les deux ne dépendant que de $\{\lambda_n\}$ et Δ, telles que

$$(3) \qquad |d_n| < A\lambda_n \Lambda_n^* M\, e^{\lambda_n a}.$$

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème principal de mon Mémoire [6], donné sous sa forme D. Sa démonstration est difficile et il ne peut être question de la reproduire ici. Faisons seulement les remarques suivantes : le cercle $C(s_0, \pi R)$ de l'énoncé du théorème F (théorème fondamental de [6]) a été choisi de sorte que le point $s_0 = a$ soit sur l'axe réel et que R, tout en étant supérieur à D^*, soit assez petit pour que le cercle fermé de centre s_0 et de rayon πR, $\overline{C(s_0, \pi R)}$, appartienne à Δ. D'après la conclusion du théorème F on peut alors poser

$$A = 2^{-1}\pi^2 R\, e^{\rho(\pi R)}.$$

L'énoncé de la forme D du théorème F est plus général, même en ce qui concerne $g(\sigma)$, bien qu'on y suppose $g(\sigma) > D^*$ dans tout le domaine; mais il est clair que l'énoncé que nous venons de donner est équivalent à celui qu'on obtiendrait en y remplaçant c_0 par une quantité a telle que $g(\sigma) > D$ pour $\sigma > a$.

2. Nous avons démontré dans [6] que

$$\nu[\overline{D}^*(p)] = o(p), \qquad \nu[D^*(p)] = o(p) \qquad (p \to \infty).$$

Par conséquent, quelle que soit la constante positive γ, et quel que soit $0 < \delta < 1$, on a pour σ suffisamment grand

$$2\nu\big[\overline{D}^*\big(\gamma p_n(\sigma)\big)\big] - p_n(\sigma) < -\delta p_n(\sigma).$$

La même inégalité a lieu lorsque D^* est remplacé par D^*.

Comme $D^*\big(p_n(\sigma)\big) \downarrow D^*(\sigma \to \infty)$, on voit que l'hypothèse C est certainement satisfaite si la condition suivante est remplie.

C_1. Il existe une constante positive γ telle que

$$(4) \qquad \int^{\infty} p_n(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{\pi - \overline{D}^*(\gamma p_n(u))}}\, d\sigma = \infty.$$

Si $D^* = \overline{D}^*$, la condition C_1 peut évidemment être remplacée par une condition semblable où $\overline{D}^*$ est remplacé par D^*. Si par contre $D^* > \overline{D}^*$ la condition

C_2. $\lim g(\sigma) > D^*$; il existe une constante positive γ telle que

$$\int^{\infty} p_n(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{g(u)-\overline{D}^* \gamma p_n(u)}}\, d\sigma = \infty \tag{5}$$

est plus restrictive que la condition C_1, l'intégrale figurant dans l'exponentiel de (5) étant plus grande que l'intégrale correspondante dans (4).

Les conditions C_1, C_2, avec $\gamma = 1$, sont celles qui figurent respectivement dans les formes B et A du théorème F énoncé dans [6].

3. Soit $\{\Lambda_n(\sigma)\}$ une suite de fonctions dont chacune est continue, non croissante, toutes définies pour $\sigma \geq \sigma_0$, tendant vers zéro lorsque σ tend vers l'infini, et telles que

$$\Lambda_n(\sigma) = O\big(\Lambda_{n-1}(\sigma)\big) \qquad (\sigma \to \infty).$$

C'est-à-dire, il existe des constantes finies $I_n > 1$ telles que, pour $\sigma \geq \sigma_0$, $\Lambda_n(\sigma) \leq I_n \Lambda_{n-1}(\sigma)$, $(n \geq 2)$.

Posons

$$e^{-p_n \sigma} = A(\sigma) = \underset{n-1}{\text{borne}}\, \Lambda_n(\sigma).$$

Si, dans Δ, on a pour tout $n \geq 1$, $\sigma > \sigma_0$, (σ_0 indépendant de n)

$$\left| F(s) - \sum_1^n d_k e^{-\lambda_k s} \right| \leq \Lambda_n(\sigma), \tag{6}$$

on peut affirmer que, n étant quelconque, pour $m \geq n$ les sommes $\sum_1^n d_k e^{-\lambda_k s}$ représentent $F(s)$ dans Δ avec une précision logarithmique $p_n^*(\sigma)$, où

$$e^{-p_n^* \sigma} = \underset{m-n}{\text{borne}}\, \Lambda_m(\sigma) \leq I_2 I_3 \dots I_n \underset{m-1}{\text{borne}}\, A_m(\sigma) = L_n \Lambda(\sigma).$$

Autrement dit $p_n^*(\sigma) \geq p_0(\sigma) - \log L_n$ ($L_n = I_2 I_3 \dots I_n$). Par conséquent, si les conditions C, C_1, C_2 sont remplies lorsqu'on y remplace $p_n(\sigma)$ par $p_n(\sigma)$, elles sont remplies à plus forte raison lorsqu'on y remplace $p_n(\sigma)$ par $p_n^*(\sigma)$, $(n \geq 1)$.

On voit ainsi que si, dans l'hypothèse B, le fait que, pour $m \geq n$ les sommes $\sum_1^m d_k e^{-\lambda_k s}$ représentent $F(s)$ dans Δ avec une précision logarithmique $p_n(\sigma)$, est remplacé par l'hypothèse que les inégalités (6) ont lieu pour $n \geq 1$, et si, dans l'hypothèse C (ainsi d'ailleurs que dans C_1 et C_2)

$p_n(\sigma)$ est remplacé par $p_0(\sigma)$ où

$$p_0(\sigma) = -\log \Lambda(\sigma),$$

les inégalités (3) ont lieu pour $n \geq 1$.

4. Supposons que $\lim_{\sigma=\infty} g(\sigma) = a$, avec

$$\int^{\infty} |a - g(\sigma)|\, d\sigma < \infty. \tag{7}$$

Comme $a > \overline{D}$, on a $\left(\lim h(\sigma) = D\right)$

$$\int^{\sigma} \frac{du}{g(u) - h(u)} - \int^{\sigma} \frac{du}{a - h(u)} = \int^{\sigma} \frac{[a - g(u)]\, du}{[g(u) - h(u)][a - h(u)]} = O(1) \quad (\sigma \to \infty).$$

et, en particulier

$$\int^{\sigma} \frac{du}{g(u) - \overline{D}[\gamma p(u)]} - \int^{\sigma} \frac{du}{a - \overline{D}[\gamma p(u)]} = O(1) \quad (\sigma \to \infty).$$

Si $a > D$, cette dernière relation est encore valable lorsque $\overline{D}$ y est remplacé par D.

Si (7) a lieu, les relations (2), (4), (5) sont équivalentes à celles qu'on obtient en y remplaçant $g(u)$ par a.

5. Soit $\{M_n\}$ une suite positive, $\{\nu_n\}$ une suite positive croissante vers l'infini, $\{q_n\}$ une suite positive croissante, et supposons que, dans Δ

$$\left| F(s) - \sum_{1}^{n} d_k e^{-\lambda_k s} \right| \leq M_q e^{-\nu_q \sigma} \qquad (q_n \leq q < q_{n+1}). \tag{8}$$

Les relations (6) ont alors lieu avec

$$\Lambda_n(\sigma) = \underset{q_n \leq q < q_{n+1}}{\text{borne}}\ M_q e^{-\nu_q \sigma} \quad \text{et} \quad \Lambda(\sigma) = \underset{n \geq 1}{\text{borne}}\ \Lambda_n(\sigma) = \underset{q \geq q_1}{\text{borne}}\, M_q e^{-\nu_q \sigma}.$$

La fonction $p_0(\sigma)$ étant définie comme plus haut, on a

$$p_0(\sigma) = \overline{\underset{q \geq q_1}{\text{borne}}}(\nu_q \sigma - \log M_q).$$

Si

$$\underline{\lim}\, M_q^{\frac{1}{\nu_q}} < \infty,$$

on a pour σ suffisamment grand $p_0(\sigma) = \infty$, et les conditions C, C_1, C_2 sont satisfaites automatiquement. Supposons maintenant que

$$\lim M_q^{\frac{1}{\nu_q}} = \infty, \qquad \sigma_0 = \min_{q \geq 1} \frac{\log M_q}{\nu_q}$$

et désignons par $\Pi(x)$ l'ordonnée du point d'abscisse x du polygone de Newton « modifié » de la suite des points $\{(\nu_q, \log M_q)\}$, c'est-à-dire, l'ordonnée de la plus haute ligne polygonale convexe dont tous les côtés sont à pente non inférieure à σ_0, et telle qu'il n'y ait aucun point $(\nu_q, \log M_q)$, au-dessous de cette ligne. On écrira

$$\log M_q^{\nu} = \Pi(\nu_q) \quad (^1).$$

Si $\nu_q = q (q \geq 1)$ on omettra le signe ν, et l'on écrira M_q^c pour la valeur correspondante de $M_q^{c,\nu}$.

Il est géométriquement évident que pour $\sigma \geq \sigma_0$

$$p(\sigma) = \overline{\underset{q\geq 1}{\text{borne}}}(\nu_q \sigma - \log M_q) = \overline{\underset{q\geq 1}{\text{borne}}}(\nu_q \sigma - \log M_q^{c,\nu}). \tag{9}$$

On voit aussi que pour σ assez grand

$$p_0(\sigma) = p(\sigma) = \overline{\underset{q\geq 1}{\text{borne}}}(\nu_q \sigma - \log M_q) = \overline{\underset{q\geq 1}{\text{borne}}}(\nu_q \sigma - \log M_q^{c,\nu}). \tag{9}$$

La suite

$$\left\{\frac{\log M_q^{\nu} - \log M_{q-1}^{\nu}}{\nu_q - \nu_{q-1}}\right\}, \qquad M_0^{\nu} = 1, \qquad \nu_0 = 0$$

croit vers l'infini avec q. Désignons par μ_q le terme général de cette suite $(q \geq 2)$, en posant $\mu_1 = \nu_1^{-1} \log M_1^{\nu}$, et définissons $n_\nu(\mu)$ de la manière suivante :

$$n_\nu(\mu) = 0 \qquad \text{pour} \quad \mu \leq \mu_1,$$
$$n_\nu(\mu) = \nu_q \qquad \text{pour} \quad \mu_q < \mu \leq \mu_{q+1}.$$

On a le lemme suivant :

LEMME I (²). — *On a pour σ suffisamment grand*

$$p(\sigma) = \int_{\mu_1}^{\sigma} n_\nu(u)\, du.$$

Pour $\mu_q < \sigma \leq \mu_{q+1}$ on a

$$\int_{\mu_1}^{\sigma} n_\nu(u)\, du = \sum_{k=1}^{q-1} (\mu_{k+1} - \mu_k)\nu_k + (\sigma - \mu_q)\nu_q = \nu_q \sigma - \log M_q^{\nu}.$$

(¹) La définition et la construction de la suite $\{M_n^{\nu}\}$ sont encore valables lorsque plusieurs M_n sont égaux à $+\infty$, une infinité de ces quantités étant toutefois supposées finies (positives).

(²) Pour le cas $\nu_q = q (q \geq 1)$, ce lemme est démontré dans [8]. D'ailleurs ce cas particulier est fréquemment utilisé dans la théorie des fonctions entières par M. Valiron.

Mais pour $0 < n < q$,

$$\nu_n\sigma - \log M_n^{\nu} = \sum_{k=1}^{n-1}(\mu_{k+1}-\mu_k)\nu_k + (\sigma-\mu_n)\nu_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(\mu_{k+1}-\mu_k)\nu_k + \nu_n\sum_{k=n}^{q-1}(\mu_{k+1}-\mu_k) + (\sigma-\mu_q)\nu_n$$

$$\leq \sum_{k=1}^{q-1}(\mu_{k+1}-\mu_k)\nu_k + (\sigma-\mu_q)\nu_q = \nu_q\sigma - \log M_q^{\nu}$$

et pour $n > q$

$$\nu_n\sigma - \log M_n^{\nu} = \sum_{k=1}^{q-1}(\mu_{k+1}-\mu_k)\nu_k + (\sigma-\mu_q)\nu_q - \sum_{q+1}^{n}\mu_k(\nu_k-\nu_{k-1}) + (\nu_n-\nu_q)\sigma$$

$$= \nu_q\sigma - \log M_q^{\nu} - \sum_{q+1}^{n}(\mu_n-\sigma)(\nu_k-\nu_{k-1}) \leq \nu_q\sigma - \log M_q^{\nu}.$$

Le lemme est ainsi démontré.

Il résulte en particulier de ce lemme que pour σ assez grand

$$p(\sigma) \leq \int_{\sigma-1}^{\sigma} n_\nu(u)\,du \leq n_\nu(\sigma+1). \tag{10}$$

6. La fonction $p(\sigma)$ étant donnée par (9), posons, lorsque $a > D^*$,

$$B_1(a) = 2^{-1}\left[a - D^*\left(\gamma p(a)\right)\right]^{-1}$$

et, lorsque $a > D^*$,

$$B_2(a) = 2^{-1}\left[a - D^*\left(\gamma p(a)\right)\right]^{-1}.$$

On a

$$\lim_{a=\infty} B_1(a) = \frac{1}{2(a-D^*)} > 0, \qquad \lim_{a=\infty} B_2(a) = \frac{1}{2(a-D^*)} > 0.$$

Nous allons démontrer le lemme suivant :

LEMME 2. — *Pour chaque valeur de i $(i = 1, 2)$ les deux expressions*

$$\sum^{\infty} e^{-\int^{\mu_q} B_i(u)\,du}(\nu_q - \nu_{q-1}) \qquad \left(\mu_q = \log\left(\frac{M_q^{\nu}}{M_{q-1}^{\nu}}\right)^{\frac{1}{\nu_q-\nu_{q-1}}}\right), \tag{11}$$

$$\int^{\infty} p(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\,d\sigma \tag{12}$$

convergent simultanément.

En intégrant par parties (en tenant compte du lemme 1), on obtient

$$(13)\quad \int_x^N p(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du} B_i(\sigma)\,d\sigma = -\int_x^N p(\sigma)\, de^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du} = -p(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\Big]_x^N + \int_x^N n_\nu(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\,d\sigma.$$

Par conséquent la convergence de

$$(14)\quad \int_x^\infty n_\nu(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\,d\sigma$$

entraine celle de (12), car $B_i(u)$ tend vers une limite positive lorsque $u \to \infty$. Si, par contre, l'intégrale (12) converge, il existe une suite $\{N_j\}$ tendant vers l'infini, telle que

$$\lim_{j=\infty} p(N_j)\, e^{-\int^{N_j} B_i(u)\,du} = 0,$$

et, comme la limite de $B_i(u)$ est finie, on voit, d'après (13), que

$$\lim_{j=\infty} \int_x^{N_j} n_\nu(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\,d\sigma < \infty.$$

Les deux expressions (12) et (13) convergent, par conséquent simultanément. On a aussi

$$\int_x^N n_\nu(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du} B_i(\sigma)\,d\sigma = -\,n_\nu(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\Big]_x^N + \int_x^N e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\,dn_\nu(\sigma)$$

et, un raisonnement analogue au précédent prouve que l'expression (14) et

$$(15)\quad \int^x e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\,dn_\nu(\sigma)$$

convergent simultanément. Or l'expression (15) n'est autre que (11).

7. Comme $D^*(\lambda)$ et $D^*(\lambda)$ sont des fonctions non croissantes, on a, en vertu de (10),

$$B_i(u) \leq \frac{1}{2(u-D^*[\gamma n_\nu(u-1)])} = C_i(u-1).$$

Donc la divergence de

$$(16)\quad \sum e^{-\int^{\gamma_q} C_i(u-1)\,du}(\gamma_q - \gamma_{q-1}),$$

entraine celle de (11) ($i=1$). Mais la divergence de

$$\sum^{\infty} e^{-\int^{\mu_q} c_1(u)\,du}(\nu_q-\nu_{q-1}), \tag{17}$$

entraine celle de (16), car

$$\lim_{q=\infty}\int_{\mu_{q-1}}^{\mu_q} C_1(u)\,du=\frac{1}{2(a-\overline{D}^*)}.$$

Donc la divergence de (17) entraine celle de (11) et (12) ($i=1$). Mais on a, pour $\mu_{q-1}<u\leq\mu_q$, $n_\nu(u)=\nu_{q-1}$; on a donc, pour ces valeurs de u,

$$C_1(u)=2^{-1}\left[a-\overline{D}^*(\gamma\nu_{q-1})\right]^{-1}$$

et

$$\int_{\mu_1}^{\mu_q} C_1(u)\,du=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-1}\frac{(\mu_{k+1}-\mu_k)}{a-\overline{D}^*(\gamma\nu_{q-1})}.$$

Des remarques analogues sont valables pour $i=2$, $\overline{D}^*$ étant remplacé par $D^*(a>D^*)$.

8. Résumons. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite positive croissante dont D^*, $\overline{D}^*$, $D^*(\lambda)$, $\overline{D}^*(\lambda)$, $\nu(D)$ sont respectivement la densité supérieure, la densité moyenne supérieure, la fonction de densité supérieure, la fonction de densité moyenne supérieure, la fonction d'excès. Soit $\{M_n\}$ une suite positive et $\{\nu_n\}$ une suite positive croissante vers l'infini. Si $\lim M_q^{\frac{1}{\nu_q}}=\infty$, on désignera par M_q^{ν} les termes de la suite obtenue à partir des suites $\{M_n\}$, $\{\nu_n\}$, comme il a été indiqué page 105. Posons

$$p(\sigma)=\overline{\operatorname{borne}}_{q\geq 1}(\nu_q\sigma-\log M_q). \tag{18}$$

Soit, enfin, a une constante positive. Chacune des conditions U_i qui suivent (dites hypothèses d'unicité, étant donné le rôle qu'elles vont jouer dans les théorèmes d'unicité) marque une relation entre différents éléments précités.

U_1. *Soit $p(\sigma)$ une fonction croissante. Il existe une fonction continue non croissante $h(u)$ et une fonction non décroissante $C(u)$ telles que*

$$\nu|h(\sigma)|-p(\sigma)<-C(\sigma),$$

$$\int^{\infty} C(\sigma)\,e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma}\frac{du}{a-h(u)}}\,d\sigma=\infty, \qquad a>\overline{D}^*.$$

Cette condition sera aussi désignée par $U_1(\lambda_n, p(\sigma), a)$. Si $p(\sigma)$ est donné par (18) on désignera aussi cette condition pour $U_1(\lambda_n, \nu_n, M_n, a)$ (1).

(1) Dans la définition des conditions U_i on peut admettre que plusieurs M_i sont égaux à $+\infty$, une infinité d'entre eux étant supposés finis (*voir* la Note (1) de la page 106.)

U_2. *Il existe une constante positive* γ *telle que*

$$\int^{\infty} p(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{a-\overline{D}^*(\gamma p(u))}} = \infty, \qquad a > D^*,$$

On désignera aussi cette condition pour $U_2(\lambda_n, p(\sigma), a)$, et si (18) est rempli, par $U_2(\lambda_n, \nu_n, M_n, a)$.

U_3. *Cette hypothèse diffère de* U_2 *par le fait que la lettre* D^* *y est remplacée par* D^* (donc aussi $a > D^*$).

U_4. $\lim M_q^{\frac{1}{\nu_q}} = \infty$ *et il existe une constante positive* γ *telle que,* $p(\sigma)$ *étant donné par* (18)

$$\sum^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\int^{\mu_q} \frac{du}{a-\overline{D}^*(\gamma p(u))}} = \infty, \qquad \mu_q = \log\left(\frac{M_q^{c,\nu}}{M_{q-1}^{c,\nu}}\right)^{\frac{1}{\nu_q-\nu_{q-1}}}, \qquad a > \overline{D}^*,$$

cette condition sera aussi désignée par $U_4(\lambda_n, \nu_n, M_n, a)$.

U_5. *Même hypothèse que* U_4 *sauf que* $\overline{D}^*$ *est remplacé par* D^*.

$$U_5 \equiv U_5(\lambda_n, \nu_n, M_n, a).$$

U_6. $\lim M^{\frac{1}{\nu_q}} = \infty$, *il existe une constante positive* γ *telle que*

$$\sum^{\infty} e^{-h_q(\nu_q - \nu_{q-1})} = \infty,$$

$$h_q = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-1} (\mu_{k+1} - \mu_k) \frac{1}{a - D^*(\gamma\nu_k)},$$

μ_q *comme dans* U_4, $a > D^*$.

$$U_6 \equiv U_6(\lambda_n, \nu_n, M_n, a).$$

U_7. *Comme* U_6, *sauf que* D^* *est remplacé par* D^*.

$$U_7 \equiv U_7(\lambda_n, \nu_n, M_n, a).$$

U_8. $\underline{\lim} M_n^{\frac{1}{\nu_n}} < \infty$, $a > D^*$.

Cette condition sera aussi désignée par $U_8(\lambda_n, \nu_n, M_n, a)$. L'hypothèse U_4 est moins restrictive que chacune des hypothèses U_2, U_3. Lorsque $p(\sigma)$ est donné par (18) et $\lim M_n^{\frac{1}{\nu_n}} = \infty$, les hypothèses U_2, U_4, d'une part, et les hypothèses U_3, U_5, d'autre part, sont équivalentes.

L'hypothèse U_6 est plus restrictive que l'hypothèse U_4, et l'hypothèse U_7 est plus restrictive que U_5. L'hypothèse U_8 est la plus restrictive.

Et voici, le cas particulier du théorème F du mémoire [6] sous une forme qui sera utilisée dans les chapitres suivants.

THÉORÈME PRÉLIMINAIRE I. — *Soit* $F(s)$ *une fonction holomorphe dans un domaine* Δ *du plan* $s = \sigma + it$, *défini par*

$$\sigma > \sigma_0, \qquad |t| < \pi g(\sigma),$$

où $g(\sigma)$ *est une fonction croissante, continue, telle que*

$$\lim_{\sigma = \infty} g(\sigma) = a, \qquad \int^{\infty} \big(a - g(\sigma)\big)\, d\sigma < \infty.$$

Supposons que dans Δ

$$|F(s)| \leq M.$$

Soit $\{\lambda_n\}$ *une suite croissante, positive, dont* D^*, D^*, $D^*(\lambda)$, $D^*(\lambda)$, $\nu(D)$, $\{\Lambda_n^*\}$ *sont respectivement la densité moyenne supérieure, la densité supérieure, la fonction de densité moyenne supérieure, la fonction de densité supérieure, la fonction d'excès et la suite associée.*

Soit $\{M_n\}$ *une suite positive et* $\{\nu_n\}$ *une suite positive croissante vers l'infini, et posons*

$$p(\sigma) = \overline{\underset{n=1}{\text{borne}}}\,(\nu_n \sigma - \log M_n).$$

Supposons que dans Δ

$$\left| F(s) - \sum_1^n d_k e^{-\lambda_k s} \right| \leq M_q\, e^{-\nu_q \sigma} \qquad (q_n \leq q < q_{n+1}),$$

où $\{q_n\}$ *est une suite positive croissante vers l'infini.*

Si l'une des hypothèses U_i *est satisfaite, il existe une constante positive* A *et une constante réelle* u (*finies*) *ne dépendant que de* $\{\lambda_n\}$ *et* Δ *telle que pour tout entier* $n \geq 1$

$$|d_n| < A \lambda_n \Lambda_n^* M e^{\lambda_n u}.$$

9. Les précisions que nous venons d'apporter au théorème F permettent aussi de rendre plus explicite le théorème (Q — A) de ce même Mémoire [6]. C'est un théorème sur la quasi-analyticité généralisée. Nous aurons à utiliser ce théorème sous la forme suivante :

THÉORÈME PRÉLIMINAIRE II. — *Soit* $f(x)$ *une fonction indéfiniment dérivable dans l'intervalle* $]0, \infty[$.

Soit $\{k_n\}$ *une suite d'entiers positifs croissants, et désignons par* $\{\lambda_n\}$ *la suite d'entiers positifs complémentaire à la suite* $\{k_n\}$ *par rapport à la suite de tous les entiers positifs.*

Soit $\{M_n\}$ *une suite positive croissante, et supposons que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n \qquad \big(n \geq 0,\ x \in]0, \infty[\big),$$
$$f^{(k_n)}(0) = 0 \qquad (n \geq 0,\ k_n = 0).$$

Si l'une des hypothèses $U_i\left(\lambda_n,\ n,\ M_n,\ \frac{1}{2}\right)$ *est satisfaite, la fonction* $f(x)$ *est identiquement nulle.*

Sans répéter la démonstration du théorème (Q — A), remarquons seulement que la fonction $C_f(\sigma)$ introduite dans [6] satisfait à l'inégalité

$$p(\sigma)=\overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}(n\sigma-\log M_n)\leq C_f(\sigma),$$

et la condition (Q_1) du théorème (Q — A) (p. 369 [6]), avec $\overline{D}^*<\frac{1}{2}$, est satisfaite si l'hypothèse, la moins restrictive, $U_1\left(\lambda_n,\ n,\ M_n,\ \frac{1}{2}\right)$ l'est.

Le théorème que nous venons d'énoncer est donc bien un cas particulier du théorème (Q — A).

10. Il est utile, pour la suite, d'énoncer la très légère généralisation suivante du théorème préliminaire II.

Théorème préliminaire II^{bis}. — *Soit* n_0 *un entier non négatif. Les hypothèses* $U_i\left(\lambda_n,\ n,\ M_n,\ \frac{1}{2}\right)$ *du théorème préliminaire* II *peuvent être remplacées par les hypothèses* $U_i\left(\lambda_{n_0+n},\ n,\ M_n,\ \frac{1}{2}\right)$.

C'est-à-dire, en posant $\lambda_n^{(n_0)}=\lambda_{n_0+n}\ (n\geq 1)$, et en désignant par $D^*_{n_0}(\lambda)$, $\overline{D}^*_{n_0}(\lambda)$, $\nu_{n_0}(D)$ respectivement la fonction de densité supérieure, la fonction de densité moyenne supérieure et la fonction d'excès de la suite $\{\lambda_n^{(n_0)}\}$, la conclusion du théorème préliminaire II reste vraie, si les éléments $D^*(\lambda)$, $\overline{D}^*(\lambda)$, $\nu(D)$ qui interviennent dans les hypothèses U_i explicitées, y sont respectivement remplacés par $D^*_{n_0}(\lambda)$, $\overline{D}^*_{n_0}(\lambda)$, $\nu_{n_0}(D)$.

Voici les quelques modifications qu'il faut apporter à la démonstration du théorème (Q — A) pour avoir le nouvel énoncé. La fonction $F_a(s)$ étant définie par la formule (20) (p. 367 [6]) du Mémoire, on a, d'après les inégalités (22) de ce même Mémoire, lorsque s varie dans le domaine Δ donné par $\sigma>0$, $|t|<\arccos e^{-\sigma}=\pi g(\sigma)$ où $g(\sigma)$ croît vers $\frac{1}{2}$,

$$\left|F_a^*(s)-\sum_{k=1}^{m} d_{n_0+k}^{(a)}\, e^{-(\lambda_k^{(n_0)}+1)s}\right|\leq M_q\, e^{q(a-\sigma)}\qquad (\lambda_m^{(n_0)}+1\leq q<\lambda_{m+1}^{(n_0)}+1),$$

où l'on a posé

$$F_a^*(s)=F_a(s)\,e^{-as}-\sum_{1}^{n_0} d_k^{(a)}\, e^{-(\lambda_k+1)s},\qquad d_k^{(a)}=e^{ia\alpha}f^{(\lambda_k)}(0)\quad (1).$$

(1) La quantité $d_k^{(a)}$ a ici la valeur de la quantité désignée par la même lettre dans [6] divisée par e^{ia}.

(Dans ce qui précède la quantité $\lambda_k (k \geq 1)$ est d'une unité inférieure à la quantité désignée par la même lettre dans [6].)

Comme, dans Δ, $|F_a(s)|\, e^{-a} \leq M$ (quantité finie, indépendante de a) ([6], p. 369), on voit que dans ce domaine, pour $a \geq 0$

$$|F_a^*(s)| \leq A_1 e^{\lambda_{n_0} a}$$

où A_1 est une quantité finie indépendante de a.

Remarquons que, d'une part, la fonction de densité de la suite $\{\lambda_n^{(n_0)} + 1\}$ n'est pas supérieure à celle de la suite $\{\lambda_n^{(n_0)}\}$, c'est-à-dire que la fonction d'excès de $\{\lambda_n^{(n_0)} + 1\}$ n'est pas supérieure à celle de $\{\lambda_n^{(n_0)}\}$, et que, d'autre part,

$$p_a(\sigma) = \overline{\underset{q \geq 1}{\text{borne}}} [q\sigma - \log(M_q e^{qa})] = p(\sigma - a),$$

où

$$p(\sigma) = \overline{\underset{q \geq 1}{\text{borne}}} (q\sigma - \log M_q).$$

Et il est clair que l'hypothèse $U_1\left(\lambda_n^{(n_0)}, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ implique l'hypothèse $U_1\left(\lambda_n^{(n_0)} + 1, p_a(\sigma), \frac{1}{2}\right)$. Il est aussi évident que

$$\int^{\infty} \left(\frac{1}{2} - g(\sigma)\right) d\sigma < \infty.$$

Il suffit donc d'appliquer le théorème préliminaire I (avec $F(s) = F_a^*(s)$, $d_k = d_{n_0+k}^{(a)}$, $M = A_1 e^{\lambda_{n_0} a}$) pour avoir

$$|d_{n_0+k}^{(a)}| = e^{\lambda_{n_0+k} a} |f^{(\lambda_{n_0}+k)}(0)| \leq A_2 L_k e^{\lambda_{n_0} a} e^{\lambda_k u} \qquad (k \geq 1),$$

où L_k dépend seulement de k, A_2 et u étant indépendants de a.

En faisant tendre a vers $+\infty$ (k restant fixe), on a immédiatement

$$d_{n_0+k}^{(a)} = e^{\lambda_{n_0+k} a} f^{(\lambda_{n_0}+k)}(0) = 0.$$

Par conséquent

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad \text{pour} \quad n \geq \lambda_{n_0} + 1.$$

Posons $f^{(\lambda_{n_0}+1)}(x) = f_0(x)$. On a $|f_0^{(k)}(x)| \leq M_{\lambda_{n_0}+1+k} (k \geq 0)$, $f_0^{(k)}(0) = 0 (k \geq 0)$. En posant

$$p^*(\sigma) = \overline{\underset{q \geq 1}{\text{borne}}} (q\sigma - \log M_{\lambda_{n_0}+1+q}),$$

il est encore évident que la condition $U_1\left(\lambda_n^{(n_0)}, n, M_n, \frac{1}{2}\right)$ implique la condition

$$\int^{\infty} p^*(\sigma)\, e^{-\sigma}\, d\sigma = \infty.$$

Il résulte donc du théorème classique de la quasi-analyticité (ou du théorème préliminaire II, qui est beaucoup plus général) que $f_0(x) \equiv 0$. Donc $f(x)$ ne peut être qu'un polynome, mais comme $|f(x)| < M_0 (x \geq 0)$, on voit que $f(x) \equiv 0$.

11. Je profite de cette occasion pour signaler quelques fautes d'impression qui se sont glissées dans [6]. Signalons que l'expression $3\log\left(\lambda_n D\left(\sqrt{2}\lambda_n\right)\right)$ de la page 355 doit être remplacée par $3\log\left(h_n D\left(\sqrt{2}\lambda_n\right)\right)$, et que, page 362, on doit lire $\overline{\underset{m\leq n}{\text{borne}}}\, P_m(\sigma)$ au lieu de $\overline{\underset{m=n}{\text{borne}}}\, P_m(\sigma)$. Remarquons aussi que les deux dernières lignes de la page 370 seraient plus claires si la phase « avec $F(s)=F_n(s)$, $s_0=\xi+\pi R$, $M(s_0, R)\leq M e^{\sigma}$, $\{\lambda_n\}=\{q_n+1\}$ », était remplacée par la phase « avec $F(s)=F_n(s)e^{-\sigma}$, $s_0=\xi+\pi R$, $M(s_0, R)\leq M$, $\{\lambda_n\}=\{q_n+1\}$, $d_n=d_n^{(n)}e^{-\sigma}$ ».

APPROXIMATION POLYNOMINALE SUR L'AXE ENTIER. SUITES FERMÉES.

1. Le théorème suivant de S. Bernstein est bien connu [1]. Soit $\{\beta_n\}$ une suite positive croissante avec $\sum \beta_n^{-2} < \infty$ et

$$\sum \frac{1}{\beta_n} = \infty. \tag{19}$$

Posons

$$F(x)=H\left(1+\frac{x^2}{\beta_n^2}\right). \tag{20}$$

$f(x)$ étant une fonction continue $(-\infty<x<\infty)$ telle que

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=0,$$

à tout $\varepsilon>0$ correspond un polynome $P(x)$ tel que

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon F(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \tag{21}$$

Remarquons que la condition (19) équivaut à chacune des conditions suivantes :

$$\int^{\infty}\frac{\log F(x)}{x^2}dx=\infty, \tag{22}$$

$$\int^{\infty}\log F(e^{\sigma})e^{-\sigma}d\sigma=\infty. \tag{23}$$

Nous démontrons que si la fonction $F(x)$ [qui n'est pas nécessairement de la forme (20)] et une suite d'entiers positifs $\{k_n\}$ sont liées d'une certaine manière, l'inégalité (21) peut être réalisée par un polynome de la forme

$$P(x)=a_0+\sum^{m} a_n x^{k_n}.$$

Notre théorème contient le théorème de S. Bernstein comme cas particulier.

2. Nous allons d'abord démontrer un théorème sur la fermeture de certaines suites de fonctions sur l'axe entier. C'est un théorème d'unicité dont résultera un théorème sur des suites complètes et fermées.

Rappelons d'abord les définitions suivantes : I étant un intervalle fini ou infini, une suite de fonctions $\{\varphi_n(x)\}$ est dite fermée sur I par rapport à $L_p (0 < p \leq \infty)$, si toute fonction $f(x)$, appartenant à L_p (1) sur I, pour laquelle on a

$$\int_I f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (x \geq 1)$$

est nulle presque partout.

THÉORÈME I. — *Soit $\{k_n\}$ une suite d'entiers positifs croissants et soit $\{\lambda_n\}$ la suite d'entiers positifs complémentaire à la suite $\{k_n\}$ par rapport à la suite de tous les entiers positifs.*

Soit $F(x)$ une fonction positive continue paire, $p(\sigma) = \log F(e^\sigma)$ étant une fonction convexe de σ.

Si, pour un entier non négatif n_0 l'une des hypothèses $U_2\left(\lambda_{n_0+n}, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$, $U_3\left(\lambda_{n_0+n}, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ est satisfaite, la suite

$$\left\{\frac{x^{k_n}}{F(x)}\right\} \qquad (n \geq 0,\ k_0 = 0) \tag{24}$$

est fermée sur l'axe entier par rapport à tout $L_p (1 \leq p \leq \infty)$.

Ce théorème résulte facilement du théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Les suites $\{k_n\}$ et $\{\lambda_n\}$ étant définies comme dans le théorème* I, *soit $F(x)$ une fonction positive, continue, paire, et soient la suite positive $\{M_n\}$ et la constante $q \geq 1$ telle que*

$$\int_0^\infty \left(\frac{x^n}{F(x)}\right)^q dx \leq M_n^q \qquad (n \geq 1). \tag{25}$$

Si, pour un entier non négatif n_0, l'une des hypothèses $U_i\left(\lambda_{n_0+n}, n, M_n, \frac{1}{2}\right)$ est satisfaite, la suite (24) est fermée sur l'axe entier par rapport à L_p, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3. *Démonstration du théorème* II. — Soit $f(x)$ une fonction appartenant à L_p sur l'axe entier, et supposons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)x^{k_n}}{F(x)}\,dx = 0 \qquad (n \geq 0,\ k_0 = 0). \tag{26}$$

(1) Si $0 < p < \infty$, la classe L_p est celle des fonctions pour lesquelles $\int |f(x)|^p\,dx$ existe et est fini. L_∞ est la classe des fonctions bornées sur I et intégrables sur chaque intervalle fini faisant partie de I.

Posons

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\frac{f(x)}{F(x)}\,dx.$$

La fonction $\varphi(t)$ est indéfiniment dérivable sur tout l'axe et l'on a

$$|\varphi^{(n)}(t)|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|x|^n\frac{|f(x)|}{F(x)}\,dx \qquad (n\geq 0).$$

D'après (25) et l'inégalité de Hölder on a

$$|\varphi^{(n)}(t)|\leq\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{|x|^n}{F(x)}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}\leq CM_n, \quad (^1)$$

où C est une constante. Il résulte aussi de (26) que

$$\varphi(0)=0, \qquad \varphi^{(k_n)}(0)=i^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}x^{k_n}\frac{f(x)}{F(x)}\,dx=0 \qquad (n\geq 1).$$

Donc, en vertu du théorème préliminaire II *bis*, $\varphi(t)$ est identiquement nulle, ce qui prouve que $f(x)$ est identiquement nulle, et le théorème est démontré.

4. Démontrons maintenant le théorème I. Supposons que l'hypothèse U_2 est satisfaite, la démonstration est la même pour le cas de l'hypothèse U_3.

Il résulte de cette hypothèse, en posant $k=(1-2\overline{D}^*)^{-1}$ que

$$\int^{\infty}p(\sigma)\,e^{-k\sigma}\,d\sigma=\infty.$$

Il existe donc une suite de nombres $\sigma_i\to\infty$ tels que $p(\sigma_i)>e^{\frac{k\sigma_i}{2}}$, et comme $p(\sigma)$ est une fonction convexe de σ, on a $\lim_{\sigma=\infty}\sigma^{-1}p(\sigma)=\infty$. Posons

$$n(\sigma)=[p'(\sigma)], \tag{27}$$

$[a]$ désignant la partie entière non négative de a, c'est-à-dire $[a]=0$, si $a<1$, et $[a]$ est la partie entière de a, si $a\geq 1$. La fonction $n(\sigma)$ est définie presque partout; elle est définie partout si on la complète par continuité à gauche. Comme $\sigma^{-1}p(\sigma)\to\infty$, et comme $p(\sigma)$ est une fonction convexe, $n(\sigma)$ est une fonction en escalier, non négative, non décroissante, tendant vers l'infini avec σ. Soit μ_1^* la première valeur positive où la fonction $n(\sigma)$ est discontinue, et soit $n_1=n(\mu_1^*-0)$. Il est d'ailleurs évident que $n_1=[p'(+0)]$. Posons $m(\sigma)=n(\sigma)-n_1$. Cette fonction possède les mêmes propriétés que $n(\sigma)$, avec, en plus, $m(\sigma)=0$ pour $0\leq\sigma\leq\mu_1^*$.

---

(1) Le premier facteur du membre du milieu de cette relation est à remplacer par borne $|f(x)|$, si $p=\infty$.

Soit $\{\mu_n\}$ la suite des valeurs de σ où la fonction $m(\sigma)$ est discontinue, on a évidemment $\mu_1 = \mu_1' \geq 0$. Posons $\nu_n = m(\sigma)$ pour $\mu_n < \sigma \leq \mu_{n+1}$ et désignons par $\{m_n\}$ la suite définie de la manière suivante :

pour $\nu_n \leq k < \nu_{n+1}$ $(n \geq 1)$

$$\log m_k = \sum_1^n (\nu_p - \nu_{p-1})\mu_p + (k - \nu_n)\mu_{n+1},$$

et pour $1 \leq k < \nu_1$ (si $\nu_1 > 1$)

$$\log m_k = k\mu_1.$$

Si l'on désigne, d'autre part, par N_n les quantités telles que

$$\log N_n = \sum_1^n (\nu_p - \nu_{p-1})\mu_p \qquad (n \geq 2),$$

$$\log N_1 = \nu_1 \mu_1,$$

on voit immédiatement (géométriquement, par exemple) que

$$\overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}(\nu_n\sigma - \log N_n) = \overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}(n\sigma - \log m_n).$$

Or, d'après le lemme 1 on a, pour σ assez grand,

$$\int_{\mu_1}^{\sigma} m(u)\,du = \overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}(\nu_n\sigma - \log N_n) = \overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}(n\sigma - \log m_n) \tag{28}$$

(ici, en employant la notation de la page 105, $N_n^{\nu} = N_n$).

Mais d'après (27), aux points où $p'(\sigma)$ existe, on a

$$m(\sigma) \leq p'(\sigma) \leq m(\sigma) + n_1 + 1 \qquad (\sigma \geq 0), \tag{29}$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mu_1}^{\sigma} m(u)\,du + O(1) \leq p(\sigma) \leq \int_{\mu_1}^{\sigma} m(u)\,du + (n_1+1)\sigma + O(1). \tag{30}$$

Si k est un entier positif on a, d'après (28) et le côté gauche de (30), pour σ assez grand

$$p(\sigma) \geq (k+2)\sigma - \log m_{k+2} + A,$$

où A est une constante. Cette inégalité peut être écrite, pour $x \geq x_0 > 0$, sous la forme suivante :

$$F(x) \geq L\frac{x^{k+2}}{m_{k+2}} \qquad (k \geq 0,\ L > 0).$$

On a, par conséquent, pour q tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, $k = n \geq 0$.

$$\int_{x_0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{F(x)}\right)^q dx \leq L^{-q} m'^q_{n+2} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^{2q}} \leq B^q m'^q_{n+2}$$

Comme il existe, d'autre part, une constante C telle que

$$\int_0^{x_0}\left(\frac{x^n}{F(x)}\right)^q dx \leq C^n,$$

on a $\left(\text{car } \lim m_n^{\frac{1}{n}} = \infty\right)$

$$\int_0^{x}\left(\frac{x^n}{F(x)}\right)^q dx \leq (R^{n+2} m_{n+2})^q, \tag{31}$$

où R est une constante finie. Posons

$$M_n = R^{n+2} m_{n+2} \ (n \geq 0), \qquad p(\sigma) = \overline{\underset{n-1}{\text{borne}}}\,(n\sigma - \log M_n).$$

On a, en vertu du côté droit de (30), pour σ assez grand,

$$\begin{aligned} p_1(\sigma) &= \overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}\,[n\sigma - (n+2)\log R - \log m_{n+2}] = -2\sigma + \overline{\underset{n-1}{\text{borne}}}\,[(n+2)(\sigma-d) - \log m_{n+2}] \\ &= -2\sigma + \overline{\underset{k-2}{\text{borne}}}\,[k(\sigma-d) - \log m_k] = -2\sigma + \overline{\underset{k-1}{\text{borne}}}\,[k(\sigma-d) - \log m_k] \\ &= -2\sigma + \int_{\mu_1}^{\sigma-d} m(u)\,du \geq p(\sigma-d) - (n_1+3)\sigma + O(1) \geq \frac{p(\sigma-d)}{2}, \end{aligned}$$

où $d = \log R$. $\left(\text{Il est géométriquement évident que, pour } \sigma \text{ assez grand } \overline{\underset{n\geq k_0}{\text{borne}}}\,(n\sigma - \log m_n) = \overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}\,(n\sigma - \log m_n)\right)$.

Soit $D_{n_0}^{*}(\lambda)$ la fonction de densité moyenne supérieure de la suite $\{\lambda_{n_0+n}\}$. L'hypothèse $U_2\left(\lambda_{n_0+n}, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ implique l'existence d'une constante positive γ telle que

$$\int^{\infty} p(\sigma-d)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{du}{1-2D_{n_0}^{*}[\gamma p(u-d)]}} d\sigma = \infty,$$

et l'inégalité que nous venons de démontrer prouve que

$$\int^{\infty} p_1(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{du}{1-2D_{n_0}^{*}[2\gamma p_1(u)]}} d\sigma = \infty,$$

ce qui est la condition $U_2\left(\lambda_{n+n_0}, p_1(\sigma), \frac{1}{2}\right)$. Si l'on tient compte des inégalités (31) ($M_n = R^{n+2} m_{n+2}$, $n \geq 0$), on voit que les hypothèse du théorème II sont satisfaites, d'où l'on tire la conclusion voulue.

5. On tire de ce théorème le corollaire suivant : *Si* $F(x)$ *est une fonction continue, positive, paire,* $\log F(x)$ *étant une fonction convexe de* $\log x$ $(x > 0)$, *et si la condition* (22) *est satisfaite, la suite* $\left\{\frac{x^n}{F(x)}\right\}$ $(n \geq 0)$ *est une suite fermée sur l'axe entier par rapport à tout* L_p $(\leq p \leq \infty)$.

Pour $p = \infty$ ce fait a été démontré par Izumi et Kawata [5]. Leur démonstration est une conclusion immédiate de leur généralisation aux transformées de

Fourier d'un de mes théorèmes concernant les séries de Fourier représentant les fonctions indéfiniment dérivables [7]. D'ailleurs, leur démonstration pour les transformées est une transposition de la mienne pour les séries. Remarquons, d'autre part, que si, dans la démonstration que je viens de donner du théorème I, on se borne au cas $k_n = n (n \geq 1)$, celle-ci devient beaucoup plus facile, car, au lieu d'utiliser le théorème préliminaire II *bis* (ou II), on est réduit à utiliser le théorème classique sur la quasi-analyticité; cette démonstration devient alors, à quelques détails près, celle menée dans [7] et [5].

Remarquons encore qu'il résulte de notre démonstration du théorème I que les hypothèses $U_2\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$, $U_3\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ de l'énoncé de ce théorème peuvent être remplacées par la condition plus générale

$$U_1\left(\lambda_n, p(\sigma) - \left(p'(+0) + 3\right)\sigma, \frac{1}{2}\right).$$

Pour la démonstration il suffit de remarquer que l'inégalité suivante a lieu (avec les notations de la démonstration que nous venons d'achever)

$$p_1(\sigma) \geq p(\sigma - d) - (n_1 + 3)(\sigma - d) + O(1),$$

où $d = \log R$, $n_1 = [p'(+0)]$. En substituant cette inégalité à l'inégalité $p_1(\sigma) > 2^{-1} p(\sigma - d)$, que nous avons utilisée plus haut (et qui résulte de l'inégalité ci-dessus), nous arrivons au résultat voulu.

6. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Soit $\{k_n\}$ une suite d'entiers positifs et soit $\{\lambda_n\}$ la suite d'entiers positifs complémentaire à la suite $\{k_n\}$ par rapport à la suite de tous les entiers positifs. La fonction $F(x)$ ayant les mêmes propriétés que dans l'énoncé du théorème I, posons $p(\sigma) = \log F(e^\sigma)$, et supposons qu'une des hypothèses $U_2\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$, $U_3\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ soit satisfaite.*

Soit $\varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ une fonction pouvant se mettre sous la forme

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x dt_{k_1} \int_0^{t_{k_1}} dt_{k_1 - 1} \int_0^{t_{k_1 - 1}} dt_{k_1 - 2} \dots \int_0^{t_2} f(t_1)\, dt_1,$$

la fonction

$$\frac{f(x) x^{k_1}}{F(x)}$$

appartenant à L_2 sur $(-\infty, \infty)$.

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un polynome $P(x)$ de la forme

$$P(x) = a_0 + \sum_1^m a_n x^{k_n}$$

tel que

$$|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon F(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Démonstration — Chacune des fonctions $\log\Phi_1(x)=\log F(x)-k_1\log x$, $\log\Phi_2(x)=\log F(x)-(k_1-1)\log x$ est une fonction convexe de $\log x$ $(x>0)$. Il existe donc deux fonctions continues et positives pour $x\geq 0$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, les fonctions $\log F_1(x)$ et $\log F_2(x)$ étant convexes de $\log x$ $(x>0)$, avec $F_1(x)=\Phi_1(x)$, $F_2(x)=\Phi_2(x)$ pour x suffisamment grand. Posons

$$F_2(x)=g(x)F_1(x).$$

Désignons par $\{\lambda'_n\}$ la suite complémentaire à la suite $\{k_n-k_1\}$ $(n\geq 1)$ par rapport à la suite des entiers non négatifs. Si l'on désigne par $N'(x)$ la distribution de la suite $\{\lambda'_n\}$, on voit immédiatement que $N'(x)\leq N(x)+1$ (où $N(x)$ est la distribution de $\{\lambda_n\}$). Autrement dit, en désignant par $N''(x)$ la distribution de la suite $\{\lambda'_{1+n}\}$ (c'est-à-dire de la suite $\lambda'_2,\lambda'_3,\dots$), il est clair que pour x assez grand $N''(x)\leq N(x)$, ce qui prouve que les fonctions de densité supérieure et de densité moyenne supérieure de la suite $\{\lambda'_{1+n}\}$ sont non supérieures aux fonctions respectives correspondant à la suite $\{\lambda_n\}$.

Comme, d'autre part, a étant une constante supérieure à un, on a, pour x suffisamment grand

$$\log F(x)<a\log F_1(x),$$

on voit, qu'en posant

$$p_1(\sigma)=\log F_1(e^\sigma),$$

les hypothèses $U_2\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$, $U_3\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ entraînent respectivement les hypothèses $U_2\left(\lambda'_{1+n}, p_1(\sigma), \frac{1}{2}\right)$, $U_3\left(\lambda'_{1+n}, p_1(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ (avec éventuellement, la constante γ remplacée par une constante supérieure, par exemple 2γ). En posant alors pour $x<0$, $F_1(x)=F_1(-x)$, on voit, qu'en vertu du théorème I la suite

$$\frac{1}{F_1(x)},\quad \frac{x^{k_2-k_1}}{F_1(x)},\quad \dots,\quad \frac{x^{k_n-k_1}}{F_1(x)},\quad \dots$$

est fermée sur l'axe entier par rapport à L_2.

D'après un théorème bien connu [9] cette suite est alors aussi complète sur l'axe entier par rapport à L_2, c'est-à-dire, $\psi(x)$ étant une fonction appartenant à L_2 sur l'axe entier, à tout $\eta>0$ correspondent des constantes (en nombre fini) $d_1, d_2, \dots, d_m$, telles, qu'en posant $Q(x)=d_1+\sum_2^m d_n x^{k_n-k_1}$, on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(x)-\frac{Q(x)}{F_1(x)}\right|^2 dx<\eta^2. \tag{32}$$

Comme la fonction $f(x)\left(F_1(x)\right)^{-1}$ appartient à L_2, l'inégalité (32) peut être réalisée avec $\psi(x)=f(x)\left(F_1(x)\right)^{-1}$.

Pour abréger l'écriture nous écrirons, q étant un entier positif,

$$\int_0^x dt_q \int_0^{t_q} dt_{q-1} \dots \int_0^{t_2} x(t_1)\, dt_1 = \int_0^x \frac{(x-t)^{q-1}}{(q-1)!} x(t)\, dt.$$

En posant pour $x<0$, $F_2(x)=F_2(-x)$, $g(x)=g(-x)$ on a pour x réel quelconque

$$(33)\qquad \left|\int_{k_1}^{x} \frac{(x-t)^{k_1-1}}{(k_1-1)!}\big(f(t)-Q(t)\big)\,dt\right|$$

$$\leq \left|\int_{k_1-1}^{x} \frac{(x-t)^{k_1-2}}{(k_1-2)!}\left[\left|\int_0^t \big(f(\tau)-Q(\tau)\big)\,d\tau\right|\right]dt\right|$$

$$\leq \left|\int_{k_1-1}^{x} \frac{(x-t)^{k_1-2}}{(k_1-2)!}\left(\left|\int_0^t \left(\frac{f(\tau)g(\tau)}{F_2(\tau)}-\frac{Q(\tau)g(\tau)}{F_2(\tau)}\right)^2 d\tau\right|\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \left(\frac{F_2(\tau)}{g(\tau)}\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} dt\right|$$

$$\leq \left|\int_{k_1-1}^{x} \frac{(x-t)^{k_1-2}}{(k_1-2)!}\left(\int_{-t}^{t}\left|\psi(\tau)-\frac{Q(\tau)}{F_1(\tau)}\right|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \left(\frac{F_2(\tau)}{g(\tau)}\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} dt\right|.$$

Lorsque $k_1=1$, le symbole $\int_{k_1-1}^{x}$ est à supprimer, et, dans les symboles $\int_0^t$, $\int_0^t$, t doit être remplacé par x.

Pour x assez grand $F_2(x)$ est une fonction croissante; il existe, par conséquent, une constante A tel que, pour $t>0$, $\max_{0\leq\tau\leq t} F_2(\tau) \leq A F_2(t)$ et pour $t\geq 0$

$$\int_0^t \left(\frac{F_2(\tau)}{g(\tau)}\right)^2 d\tau \leq A^2\big(F_2(t)\big)^2 \int_0^t \frac{d\tau}{\big(g(\tau)\big)^2} \leq C^2\big(F_2(t)\big)^2,$$

[$g(\tau)=\tau$, pour τ assez grand].

Et de (32) et (33) on tire immédiatement

$$\left|\int_{k_1}^{x} \frac{(x-t)^{k_1-1}}{(k_1-1)!}\big(f(t)-Q(t)\big)\,dt\right| \leq C_1\eta\, x^{k_1-1} F_2(x) \leq \eta D F(x),$$

où D est une constante indépendante de η.

Comme

$$\int_{k_1}^{x} \frac{(x-t)^{k_1-1}}{(k_1-1)!} Q(t)\,dt = P_1(x) = \frac{d_1 x^{k_1}}{k_1!} + \frac{d_2 x^{k_2}}{(k_2-k_1+1)\dots k_2} + \dots + \frac{d_m x^{k_m}}{(k_m-k_1+1)\dots k_m},$$

on tire la conclusion du théorème en posant

$$\eta = \frac{\varepsilon}{D}, \qquad a_0 = \varphi(0), \qquad a_n = \frac{d_n}{(k_n-k_1+1)\dots k_n} \qquad (1\leq n\leq m).$$

7. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LA MEILLEURE APPROXIMATION SUR L'AXE RÉEL. — *Soit $\{k_n\}$ une suite d'entiers positifs croissants, et désignons par $\{\lambda_n\}$ la suite d'entiers positifs croissants, complémentaire à la suite $\{k_n\}$ par rapport à la suite de tous les entiers positifs.*

Soit $\mathrm{F}(x)$ une fonction positive, continue, croissante, paire, k_1 fois dérivable, $p(\tau)=\log \mathrm{F}(e^{\tau})$ étant une fonction convexe de τ, et supposons que

$$|\mathrm{F}^{(k_1)}(x)| = \mathrm{O}\Big(\mathrm{F}(x)\Big)^{1-\frac{1}{k_1}} \qquad (x\to\infty). \tag{34}$$

Supposons qu'une des hypothèses $\mathrm{H}_2\Big(\lambda_n,\ p(\tau),\ \frac{1}{2}\Big)$, $\mathrm{H}_3\Big(\lambda_n,\ p(\tau),\ \frac{1}{2}\Big)$ soit satisfaite.

Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'axe entier, telle que

$$\lim_{x=\infty}\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}=0.$$

Quel que soit $\varepsilon>0$, il existe un polynome de la forme

$$\mathrm{P}(x)=a_0+a_1x^{k_1}+\ldots+a_nx^{k_n},$$

tel que

$$|f(x)-\mathrm{P}(x)|<\varepsilon\,\mathrm{F}(x) \qquad (-\infty<x<\infty).$$

Démonstration. — Posons pour $x\geq 0$

$$\Phi(x)=1+\frac{x^{k_1}}{1+x^{k_1}}\mathrm{F}(x).$$

Cette fonction est continue, croissante, k_1 fois dérivable, et, si $k_1>1$, on a pour $1\leq p\leq k_1-1$, $\Phi^{(p)}(0)=0$. Il résulte de l'égalité (34) et de la relation

$$\mathrm{F}^{(p)}(x)=\int_0^x \mathrm{F}^{(k_1)}(t)\,dt+\mathrm{P}(x) \qquad 1\leq p\leq k_1-1,$$

où $\mathrm{P}(x)$ est un polynome de degré k_1-p-1, que

$$|\mathrm{F}^{(p)}(x)|=\mathrm{O}\Big[\Big(\mathrm{F}(x)\Big)^{1-\frac{1}{k_1}}x^{k_1-p}\Big] \qquad (x\to\infty),$$

et, il est alors évident que

$$|\Phi^{(p)}(x)|=\mathrm{O}\Big[\Big(\Phi(x)\Big)^{1-\frac{1}{k_1}}x^{N_p}\Big] \qquad (x\to\infty). \tag{35}$$

où N_p est un entier positif. Posons $\mathrm{S}_k(x)=\Big(\Phi(x)\Big)^{-k}$, $\mathrm{S}_k^{(k_1)}(x)=\mathrm{R}_k(x)$. On a pour $k\geq 1$

$$\mathrm{S}_k(x)=\int_0^x \mathrm{R}_k(t)\,dt+1. \tag{36}$$

On voit, d'autre part, par induction, que pour $q \geq 1$, la fonction $S_1^{(q)}(x)$ peut être mise sous la forme d'une somme d'un nombre fini de termes $\Phi^{(\alpha_1)}(x)\Phi^{(\alpha_2)}(x)\dots\Phi^{(\alpha_r)}(x)S_{r-s}(x)$, munis de facteurs constants, avec $r \leq q$, $\alpha_i < q$ (les α_i n'étant pas nécessairement distincts).

En tenant alors compte de (35), on a pour $0 < q \leq k_1$

$$S_1^{(q)}(x) = O(x^{N_q}) \qquad (x \to \infty),$$

et, en appliquant la formule de Leibnitz, on a, pour $k \geq 1$

$$S_k^{(k_1)}(x) = R_k(x) = \left|\left[\left(S_1(x)\right)^k\right]^{(k_1)}\right| = O(x^{M_k}) \qquad (x \to \infty).$$

Posons pour $x < 0$, $S_k(x) = S_k(-x)$, $R_k(x) = S_k^{(k_1)}(x)$, cette dernière fonction est définie pour tout x, sauf peut-être pour $x = 0$, et (36) est valable pour tout x.

Soit $\tau_{1k} > 0$, d'après le théorème III, il existe pour tout $k \geq 1$ un polynome $Q_k(x)$ de la forme

$$Q_k(x) = a_0^{(k)} + \sum_1^{m_k} a_n^{(k)} x^{k_n},$$

tel que

$$|S_k(x) - Q_k(x)| < \tau_{1k} F(x) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Comme $S_k(x)$ est une fonction paire, on a aussi

$$|S_k(x) - Q_k(-x)| < \tau_{1k} F(x).$$

En ajoutant les deux inégalités on obtient

$$|S_k(x) - P_k(x)| < \tau_{1k} F(x) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{37}$$

où $P_k(x) = \frac{1}{2}\left(Q_k(x) + Q_k(-x)\right)$ est un polynome où seuls les exposants k_n, *pairs*, interviennent.

Posons maintenant

$$\bar{S}_k(x) = S_k(x) - 1 \quad (x \geq 0), \qquad S_k(x) = -S_k(-x) \quad (x < 0).$$

Il existe un polynome

$$\bar{Q}_k(x) = b_0^{(k)} + \sum_1^{m'_k} b_n^{(k)} x^{k_n},$$

tel que

$$|\bar{S}_k(x) - \bar{Q}_k(x)| < \tau_{1k} F(x) \qquad (-\infty < x < \infty);$$

et comme $\bar{S}_k(0) = 0$, on a, en particulier, $|b_n^k| < \tau_{1k} F(0)$, et

$$\left| S_k(x) - \sum_1^{m'_k} b^k{}_n x^{k_n} \right| < 2\tau_{1k} F(x) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

comme $\overline{S}_k(x)$ est une fonction impaire, on a, par un raisonnement analogue à celui qu'on a fait plus haut

$$|S_k(x) - P_k(x)| < 2\eta_k F(x) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

où $\overline{P}_k(x)$ est un polynome où n'interviennent que les puissances k_n *impaires*. Pour $x \geq 0$ cette dernière inégalité peut se mettre sous la forme

$$|S_k(x) - 1 - \overline{P}_k(x)| < 2\eta_k F(x) \qquad (x \geq 0). \tag{38}$$

Soit maintenant $\psi(x)$ une fonction continue pour $x \geq 0$ telle que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{F(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{\Phi(x)} = 0.$$

Posons

$$u = \big(\Phi(x)\big)^{-1} \qquad (x \geq 0), \qquad A(u) = \psi(x)\big(\Phi(x)\big)^{-1},$$

avec

$$A(0) = \lim_{u=0} A(u) = \lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{\Phi(x)} = 0.$$

$A(u)$ est une fonction continue dans l'intervalle $[0, 1]$. Si donc $\delta > 0$ est donné, il existe, d'après le théorème de Weierstrass, un polynome

$$P(u) = c_0 + \sum_{p=1}^{n} c_p u^p,$$

tel que, sur $[0, 1]$

$$|A(u) - P(u)| < \delta; \tag{39}$$

et comme $A(0) = 0$, on peut bien supposer $c_0 = 0$.

Cette inégalité peut être écrite sous la forme

$$\left|\psi(x) - \sum_{1}^{n} c_p \big(\Phi(x)\big)^{-p+1}\right| < \delta\,\Phi(x) < A\,\delta\,F(x) \qquad (x \geq 0),$$

où A est une constante indépendante de δ.

Comme $\big(\Phi(x)\big)^{-p+1} = S_{p-1}(x)$, on a d'après (37) et (38), pour $x \geq 0$

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\psi(x) - \sum_{1}^{n} c_p P_{p-1}(x)\right| < \left(A\,\delta + \sum_{2}^{n} |c_p|\,\eta_{p-1}\right) F(x), \\ &\left|\psi(x) - \sum_{1}^{n} c_p \overline{P}_{p-1}(x) - \sum_{2}^{n} c_p\right| < \left(A\,\delta + 2\sum_{2}^{n} |c_p|\,\eta_{p-1}\right) F(x), \end{aligned}\right. \tag{40}$$

où l'on a posé $P_0(x) = \overline{P}_0(x) = 1$. $\varepsilon > 0$ étant donné, choisissons n et c_p $(0 \leq p \leq n)$

pour que (39) ait lieu avec $\delta = \frac{\varepsilon}{4A}$, et choisissons, alors, les quantités $\eta_{1p}(0 \leq p \leq n-1)$ de sorte que

$$2\sum_{2}^{n} |c_p| \eta_{p-1} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

En posant $a = \sum_{1}^{n} c_p$, on voit, d'après les inégalités (40), que pour $x \geq 0$

$$|\psi(x) - A(x)| < \frac{\varepsilon}{2} F(x), \tag{41}$$

$$|\psi(x) - a - \overline{A}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} F(x), \tag{42}$$

où $A(x)$ et $\overline{A}(x)$ sont des polynomes, respectivement pair et impair, ne contenant que des puissances k_n. Si $\psi(0) = 0$, (42) donne $|a| < \frac{\varepsilon}{2} F(0) \leq \frac{\varepsilon}{2} F(x)$, et cette inégalité (42), donne (lorsque $\psi(0) = 0$)

$$|\psi(x) - \overline{A}(x)| < \varepsilon F(x). \tag{43}$$

Appliquons (41) à la fonction $\psi(x) = f(x) + f(-x)$ et (43) à la fonction $\psi(x) = f(x) - f(-x)$ [ici $\psi(0) = 0$].

Il existe donc un polynome pair, ne contenant que des puissances k_n, $P_1(x)$, tel que, pour $x \geq 0$

$$|f(x) + f(-x) - P_1(x)| < \varepsilon F(x), \tag{44}$$

et, il existe un polynome impair, ne contenant que des puissances k_n, $P_2(x)$, tel que, pour $x \geq 0$

$$|f(x) - f(-x) - P_2(x)| < \varepsilon F(x). \tag{45}$$

Comme $f(x) + f(-x)$ est, elle-même, une fonction paire, et que $f(x) - f(-x)$ est une fonction impaire, l'inégalité (44), ainsi que l'inégalité (45), ont lieu sur tout l'axe réel. En ajoutant ces deux inégalités on obtient, en posant $P(x) = \frac{1}{2}(P_1(x) + P_2(x))$, l'inégalité de l'énoncé, pour $(-\infty < x < \infty)$.

8. Lorsque $k_n = n (n \geq 1)$, l'ensemble $\{\lambda_n\}$ est vide, et $D'(\lambda) = D'(\lambda) = 0 (\lambda > 0)$. Donc chacune des hypothèses $\Gamma_2\left(\lambda_n, p(\tau), \frac{1}{2}\right)$, $\Gamma_3\left(\lambda_n, p(\tau), \frac{1}{2}\right)$ de l'énoncé du théorème que nous venons de démontrer devient (23). On a ainsi, comme cas particulier de ce théorème le corollaire suivant :

Si $F(x)$ est une fonction continue, positive, croissante, paire, dérivable, $\log F(x)$ étant une fonction convexe de $\log x (x > 0)$, si

$$\int^{\infty} \frac{\log F(x)}{x^2} dx = \infty,$$

et si

$$|F'(x)| = O\big(F(x)\big)^2, \tag{46}$$

alors, quelle que soit la fonction continue $f(x)$ sur l'axe entier, telle que

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = 0,$$

à tout $\varepsilon > 0$ correspond un polynome $P(x) = a_0 + \sum_1^m a_n x^n$ tel que

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon F(x) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Or, il est facile à voir que lorsque $F(x)$ est donné par le produit (20), la condition (46) est certainement remplie. En effet, $\frac{F'(x)}{F(x)}x$ étant une fonction croissante ($\log F(x)$ est ici, bien entendu, une fonction convexe de $\log x$, d'après des théorèmes bien classiques), on peut écrire pour $x > 1$

$$\log F(x) = \int_0^x \frac{F'(t)}{F(t)}\,dt \geqq \int_{x-1}^x \frac{F'(t)}{F(t)}\,dt$$

$$\geqq (x-1)\frac{F'(x-1)}{F(x-1)}\int_{x-1}^x \frac{dt}{t} \sim \frac{F'(x-1)}{F(x-1)}, \qquad (x \to \infty).$$

Mais $F(x)$ est une fonction entière d'ordre fini, donc $\log F(x) = O(x^p)$ $(p > 1)$ et

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = O(x^p) \qquad (p > 1), \quad (x \to \infty),$$

ce qui donne immédiatement la condition (46). Le théorème de S. Bernstein est donc bien un cas particulier du nôtre.

Sur les noyaux réels, symétriques singuliers.

1. Dans son étude sur les équations intégrales de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

où $[a, b]$ est un intervalle fini, Carleman considère les noyaux réels, symétriques $K(x, y)$ ayant les propriétés suivantes [3] :

1° L'expression

$$K^2(x) = \int_a^b K^2(x, y)\,dy$$

a un sens et est finie, et

$$\lim_{x' = x} \int_a^b [K(x, y) - K(x', y)]^2\,dy = 0,$$

pour toutes les valeurs de x exceptées celles d'un ensemble dénombrable $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ au plus, cette suite admettant un nombre fini de points limites.

2° Il existe au plus un nombre fini de valeurs de ξ_i, qu'on désignera par $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$, telles que, quel que soit $\delta > 0$, en désignant par I_δ le complément des intervalles $[\eta_i - \delta, \eta_i + \delta]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ par rappport à $[a, b]\left(I_\delta = [a, b] - \bigcup_{1 \leq i \leq m} [\eta_i - \delta, \eta_i + \delta]\right)$, l'expression

$$\int_{I_\delta} K^2(x)\, dx$$

existe et est finie.

Un tel noyau sera appelé noyau C.

Carleman considère aussi des noyaux C possédant la propriété M que voici :

$|K(x, y)|$ admet des noyaux itérés de tout ordre $n \geq 2$, $\overline{K}^{(n)}(x, y)$, définis pour $x \neq \xi_i$, $y \neq \xi_i$ et tels que pour $x \neq \xi_i$

$$\int_a^b \left(\overline{K}^{(n)}(x, y)\right)^2 dy < \infty.$$

Il est évident qu'un noyau C possédant la propriété M, admet des noyaux itérés de tout ordre $n \geq 2$, que nous désignerons par $K^{(n)}(x, y)$; ces noyaux existent lorsque $x \neq \xi_i$, $y \neq \xi_i (n \geq 2)$, et l'on voit immédiatement que les fonctions $K^{(2m)}(x, y)$ sont symétriques, avec

$$K^{(2m)}(x, y) \geq 0.$$

Un point (x, y) du carré $\Delta : a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$, est dit régulier s'il n'appartient à aucune droite $x = \xi_i$, $y = \xi_i$, ni à aucune droite limite de telles droites.

2. Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME I SUR LES NOYAUX. — *Soit $K(x, y)$ un noyau réel symétrique C, défini dans le carré $\Delta : a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$, possédant la propriété M. Soit (x_0, y_0) un point régulier de Δ.*

Soit $\{k_n\}$ $(k_1 = 2)$ une suite d'entiers positifs croissants contenant tous les entiers positifs pairs. Soit $\{\lambda_n\}$ la suite complémentaire à la suite $\{k_n\}$ par rapport à tous les entiers $n \geq 2$. Supposons que

$$K^{(k_n)}(x_0, y_0) = 0 \qquad (n \geq 1). \tag{47}$$

Si l'une des hypothèses $U_i(\lambda_n, \nu_n M_n, a)$ avec

$$\nu_n = 2n, \qquad M_{n-1} = [K^{(2n)}(x_0, x_0) K^{(2n)}(y_0, y_0)]^{\frac{1}{2}}, \qquad a = \frac{1}{2},$$

est satisfaite, on a

$$K^{(p)}(x_0, y_0) = 0 \qquad (p \geq 2).$$

REMARQUE. — *Si* $\lim_{n=\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, *on a, avec les notations de la page* 105, *pour n assez grand* ($\nu_n = 2n$)

$$M_n^{\frac{1}{n}} = M_n,$$

donc

$$\mu_n = \frac{1}{2} \log \frac{M_n}{M_{n-1}}.$$

3. *Démonstration* (du théorème et de la remarque). — Carleman fait correspondre à $K(x, y)$ des *fonctions spectrales* $\theta(x, y \mid \lambda)$ définies lorsque (x, y) est un point régulier et possédant les propriétés suivantes [3] : chaque fonction θ est symétrique de (x, y), continue par rapport à (x, y) (aux points réguliers), et à variation bornée par rapport à λ dans chaque intervalle fini.

Démontrons maintenant que chaque fonction spectrale possède la propriété suivante :

$K(x, y)$ étant un noyau C possédant la propriété M, (x_0, y_0) étant un point régulier de Δ, la fonction

$$A(z) = z \int_{-\infty}^{z} \frac{d_\lambda \theta(x_0, y_0 \mid \lambda)}{\lambda(\lambda - z)} \tag{48}$$

est holomorphe pour $\Im z > 0$ (et pour $\Im z < 0$) et dans $|z - ip| < p$ ($p > 0$) on a

$$A(z) \leq 2p M_0. \tag{49}$$

D'ailleurs, l'intégrale (48) converge uniformément dans chaque domaine fermé, borné D situé dans le demi-plan $\Im z > 0$.

Soit $\alpha < \beta$; comme, en posant $z = re^{i\varphi}$, on a

$$\left| 1 - \frac{z}{\lambda} \right| = \left| e^{-i\varphi} - \frac{r}{\lambda} \right| \geq \sin\varphi > 0,$$

on voit que

$$\left| \int_\alpha^\beta \frac{d_\lambda \theta}{\lambda(\lambda - z)} \right| \leq \int_\alpha^\beta \frac{d_\lambda \theta}{\lambda^2 \left| 1 - \frac{z}{\lambda} \right|} \leq \frac{1}{\sin\varphi} \int_\alpha^\beta \frac{d_\lambda \theta}{\lambda^2}. \tag{50}$$

Posons

$$\lambda_j^{(n)} = \alpha + \frac{j}{n}(\beta - \alpha) \qquad (0 \leq j < n).$$

$$\Delta_j^{(n)} \theta = \Delta_j^{(n)} \theta(x_0, y_0 \mid \lambda) = \theta(x_0, y_0 \mid \lambda_{j+1}^{(n)}) - \theta(x_0, y_0 \mid \lambda_j^{(n)}).$$

Il est évident que

$$\int_\alpha^\beta \frac{d_\lambda \theta}{\lambda^2} = \lim_{n=\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_j^{(n)} \theta}{\lambda_j^{(n)\,2}}.$$

Or, en appliquant une inégalité de Carleman (l'inégalité (71) [3]) et l'inégalité de Hölder, on a

$$(51)\qquad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|d_\lambda \theta(x_0, y_0 | \lambda)|}{\lambda^2} \leq \lim_{n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_j^n \theta(x_0, x_0)}{\lambda_j^{(n-2)}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_j^n (y_0, y_0)}{\lambda_j^{n-2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d_\lambda \theta(x_0, x_0 | \lambda)}{\lambda^2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d_\lambda \theta(y_0, y_0)}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

les fonctions $\theta(x_0, x_0 | \lambda)$, $\theta(y_0, y_0 | \lambda)$ étant des fonctions croissantes de $\lambda (-\infty < \lambda < \infty)$. D'après une égalité de Carleman (formule (173) [3]) on a d'ailleurs

$$(52)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_\lambda \theta(x_0, x_0 | \lambda)}{\lambda^n} = \mathrm{K}^{(n)}(x_0, x_0) \qquad (n \geq 1).$$

Donc, d'après (50), (51) et (52) (avec $n = 2$), on a, pour $\mathcal{I} z > 0$

$$|\mathrm{A}(z)| \leq \frac{r}{\sin \varphi} \mathrm{M}_0,$$

l'intégrale (48) fournissant $\mathrm{A}(z)$ étant uniformément et absolument convergente dans D. Comme, dans $|z - ip| < p$,

$$(53)\qquad r \leq 2p \sin \varphi,$$

(49) est établi.

L'inégalité (52) suffit pour démontrer la remarque qui suit l'énoncé du théorème.

Posons, en effet

$$m_n = \mathrm{K}^{(n)}(x_0, x_0), \qquad c > \frac{1}{2};$$

on a

$$\mathrm{P}_n(c, \lambda) = c \left(\frac{m_{n+2}}{m_n} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\lambda^{2n}} - \frac{1}{\lambda^{2n+1}} + c \left(\frac{m_n}{m_{n+2}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\lambda^{2n+2}} > 0,$$

donc, d'après (52)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}_n(c, \lambda)\, d_\lambda \theta(x_0, x_0 | \lambda) = c\, m_n \left(\frac{m_{n+2}}{m_n} \right)^{\frac{1}{2}} - m_{n+1}$$

$$+ c\, m_{n+2} \left(\frac{m_n}{m_{n+2}} \right)^{\frac{1}{2}} = 2c (m_n m_{n+2})^{\frac{1}{2}} - m_{n+1} > 0,$$

ce qui prouve, en faisant tendre c vers $\frac{1}{2}$, que

$$m_{n+1} \leq (m_n m_{n+2})^{\frac{1}{2}}.$$

et, avec les notations de l'énoncé du théorème,

$$M_{n+1} \leq (M_n M_{n+2})^{\frac{1}{2}},$$

ce qui prouve que la remarque [les points $(2n, \log M_n)$ sont les sommets d'un polygone convexe].

Nous nous appuyons maintenant sur le théorème suivant, démontré par Carleman (p. 125 [3]).

On a, pour $\Im z > 0$, $m \geq 2$

$$\left| z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_\lambda\, 0(x_0, y_0 \mid \lambda)}{\lambda(\lambda - z)} - \sum_{\nu=1}^{2m-2} K^{(\nu+1)}(x_0, y_0) z^\nu \right| \leq \frac{r^{2m-1}}{\sin \varphi} M_{m-1}. \tag{54}$$

Posons alors $z = i e^{-s+a}$, où a est une constante positive $F_a(s) = i e^{-s+a} A(i e^{-s+a})$, où $A(z)$ est la fonction donnée par (48), et supposons que s varie dans le domaine Δ, défini par

$$\sigma > 0, \qquad |t| < \arccos e^{-\sigma} = \pi g(\sigma),$$

où $g(\sigma)$ tend vers $\frac{1}{2}$ en croissant. Il est clair que

$$\int^{\infty} \left(\frac{1}{2} - g(\sigma) \right) d\sigma < \infty.$$

La variable z varie, d'autre part, dans le cercle

$$\left| z - \frac{i e^a}{2} \right| < \frac{e^a}{2}.$$

Les relations (48), (53) $\left(\text{avec } p = \frac{e^a}{2}\right)$ et (54) permettent alors d'affirmer que dans Δ

$$\left| F_a(s) - \sum_{2}^{2m-1} a_k e^{-ks} \right| \leq M_{m-1} e^a e^{-(2m-2)(\sigma - a)}, \tag{55}$$

où

$$a_k = i^k K^{(k)}(x_0, y_0) e^{ka}.$$

En tenant compte de (17), on a, en posant $d_n^{(a)} = i^{\lambda_n} K^{(\lambda_n)}(x_0, y_0) e^{\lambda_n a}$, dans Δ

$$\left| F_a(s) - \sum_{1}^{n} d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s} \right| \leq M_q e^{2q+1} e^{-2q\sigma} = M_q^{(a)} e^{-2q\sigma} \qquad (\lambda_n - 1 \leq 2q < \lambda_{n+1} - 1). \tag{56}$$

Posons

$$p_a(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{2q \geq \lambda_n - 1} (2q\sigma - \log M_q^{(a)}).$$

On a, pour σ assez grand,

$$p_a(\sigma) = \overline{\underset{2q \geq \lambda_{q-1}}{\text{borne}}} \left[2q\sigma - (2q+1)a - \log M_q \right]$$
$$= -a + \overline{\underset{2q \geq \lambda_{q-1}}{\text{borne}}} \left[2q(\sigma - a) - \log M_q \right]$$
$$= -a + \overline{\underset{q \geq 1}{\text{borne}}} \left[2q(\sigma - a) - \log M_q \right] = -a + p(\sigma - a),$$

où

$$p(\sigma) = \overline{\underset{q \geq 1}{\text{borne}}} (2q\sigma - \log M_q).$$

L'hypothèse $U_1\left(\lambda_n, 2n, M_n, \frac{1}{2}\right)$ entraîne, par conséquent l'hypothèse $U_1\left(\lambda_n, 2n, M_n^{(a)}, \frac{1}{2}\right)$.

Mais, d'autre part, l'inégalité (49) fournit (compte tenu de $p = \frac{e^a}{2}$)

$$|F_a(s)| \leq e^{2a} M_0 = M.$$

Toutes les hypothèses du théorème préliminaire I sont ainsi satisfaites, à condition d'y remplacer $F(s)$ par $F_a(s)$, d_k par $d_k^{(a)}$, M_q par $M_q^{(a)}$, et, en y posant $\nu_q = 2q$. On a donc, d'après ce théorème,

$$|d_n^{(a)}| = |K^{(a)}(x_0, y_0)| e^{\lambda_n a} < A \lambda_n A_n^2 e^{2a} e^{\lambda_n a}.$$

Or $\lambda_n \geq 3$, en fixant n et en faisant tendre a vers $+\infty$, on voit que $d_n^{(a)} = o(n \geq 1)$, c'est-à-dire que

$$K^{(a)}(x_0, y_0) = 0,$$

ce qui, joint à (47), démontre le théorème.

3. Un noyau C, $K(x, y)$, est dit du type positif, si, quelle que soit la fonction $h(x)$ s'annulant autour de chaque point ξ_i (dans un intervalle $[\xi_i - \delta_i, \xi_i + \delta_i]$, $i \geq 1$), on a

$$\int_a^b \int_a^b K(x, y) h(x) h(y) \, dx \, dy \geq 0.$$

Pour un tel noyau, supposé continu en tout point régulier, on a $[(x_0, y_0)$ étant un point régulier de $\Delta]$ (*voir* [3])

$$D(x_0, y_0, \lambda) = 0 \qquad (\lambda < 0). \tag{57}$$

Nous pouvons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME II SUR LES NOYAUX. — *Soit* $K(x, y)$ *un noyau réel symétrique* C, *défini dans le carré* $\Delta : a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$, *continu aux points réguliers, possédant la propriété* M, *et du type positif. Soit* (x_0, y_0) *un point régulier de* Δ.

Les suites $\{k_n\}$ *et* $\{\lambda_n\}$ *ayant la même signification que dans le théorème* I (*sur les noyaux*) *supposons que* (47) *ait lieu.*

Si l'une des conditions $\Gamma_i(\lambda_n, \nu_n, M_n, 1)$, *avec* $\nu_n = 2n$, M_n *défini comme dans le théorème* I *sur les noyaux, est satisfaite, on a*

$$K^{(p)}(x_0, y_0) = 0 \qquad (p \geq 2).$$

Il est évident que si $a_1 > a_2$, les conditions Γ_i avec $a = a_1$ sont moins restrictives que les mêmes conditions avec $a = a_2$.

Il est vrai que, de toute façon, on a dans les deux énoncés $\overline{D}^* \leq \frac{1}{2}$, mais, dans le premier on a nécessairement $\overline{D}^* < \frac{1}{2}$, tandis que dans le second, on peut avoir $\overline{D}^* = D^* = \frac{1}{2}$. D'ailleurs, du fait que, dans le second théorème $a = 1$, tandis que dans le premier, $a = \frac{1}{2}$, on exige bien moins sur la « petitesse » de la croissance des M_n dans le second théorème, que dans le premier.

La démonstration du second théorème diffère peu de celle du théorème I. Il suffit seulement de remarquer que de (57) il résulte que des inégalités de la forme (55) ont lieu, dans le cas du théorème II, dans un domaine Δ, donné par $\sigma > 0$, $|t| < \sigma\, g(\sigma)$, avec $\lim g(\sigma) = 1$, et

$$\int^{\infty} \big(1 - g(\sigma)\big)\, d\sigma < \infty,$$

[$g(\sigma)$ étant une fonction croissante].

Problèmes des moments.

1. Soit $\{m_n\}$ une suite de nombres réels ($n \geq 0$). On connaît des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur la suite $\{m_n\}$, pour qu'il existe une fonction non décroissante $V = V(t)$ ($t \geq 0$) telle que

$$(S^{(n)}) \qquad \int_0^{\infty} t^n\, dV = m_n \qquad (n \geq 0).$$

On connaît, de même, de telles conditions pour qu'il existe une fonction non décroissante $V = V(t)$ ($-\infty < t < \infty$), telle que

$$(H^{(n)}) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} t^n\, dV = m_n \qquad (n \geq 0).$$

On possède aussi des conditions suffisantes, très générales, portant sur les m_n, pour que, si une solution V satisfaisant à $(S^{(n)})$ existe, cette solution soit unique, lorsqu'on suppose $V(0) = 0$. Autrement dit, si ces conditions sont satisfaites, deux fonctions V_1 et V_2, satisfaisant à $(S^{(n)})$, ont les mêmes inter-

valles de continuité, et diffèrent sur ces intervalles par une constante. On connaît de même des conditions suffisantes, très générales, pour qu'il existe une seule fonction V, avec $V(-\infty) = \lim_{t=-\infty} V(t) = 0$, satisfaisant à $(H^{(m)})$, si toutefois une telle solution existe.

Le problème d'existence et d'unicité dans le cas $(S^{(m)})$ constitue le problème des moments de Stietjes, celui concernant $(H^{(m)})$ est le problème des moments de Hamburger.

Démontrons d'abord le fait suivant :

Si les quantités m_n admettent une solution V *de* $(S^{(m)})$, $\log m_n$ *est une fonction convexe de n; si ces quantités admettent une solution de* $(H^{(m)})$, $\log m_{2n}$ *est une fonction convexe de n.*

Il s'agit de démontrer que dans le premier cas

$$m_{n+1} \leq m_n^{\frac{1}{2}} m_{n-2}^{\frac{1}{2}}, \tag{58}$$

et que dans le second cas

$$m_{2(n+1)} \leq m_{2n}^{\frac{1}{2}} m_{2(n+2)}^{\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

La démonstration de ces faits est tout à fait analogue à celle de la remarque qui suit l'énoncé du théorème I sur les noyaux. Ainsi, pour le cas du problème de Stieljes, on a, pour $c > \frac{1}{2}$,

$$Q_n(c, t) = c\left(\frac{m_{n+2}}{m_n}\right)^{\frac{1}{2}} t^n - t^{n+1} + c\left(\frac{m_n}{m_{n+2}}\right)^{\frac{1}{2}} t^{n+2} \geq 0 \qquad (t \geq 0),$$

et, par conséquent

$$\int_0^\infty Q_n(c, t)\, dV = cm_n\left(\frac{m_{n+2}}{m_n}\right)^{\frac{1}{2}} - m_{n+1} + cm_{n+2}\left(\frac{m_n}{m_{n+2}}\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0.$$

On conclut, comme à la page 122 que (58) a lieu. La démonstration est analogue pour (59).

Nous allons nous occuper uniquement des problèmes d'unicité, mais les problèmes que nous envisageons sont bien plus généraux que les problèmes classiques de Stieltjes et de Hamburger.

Soit $\{k_n\}(n \geq 0)$ une suite d'entiers non négatifs, avec $k_n = 0$. Soit $\{M_n\}(n \geq 0)$ une suite réelle. Nous traitons les problèmes suivants :

Problème (S^{k_n}). — En supposant qu'il existe une fonction croissante $V = V(t)$ telle que

$$\int_0^\infty t^{k_n}\, dV = M_n \qquad (n \geq 0), \tag{S^{k_n}}$$

indiquer des conditions portant sur les k_n et les M_n, pour qu'il existe une seule fonction V avec $V(o) = o$ satisfaisant à $(S^{(k_n)})$.

Problème $(H^{(k_n)})$. — Supposons que le problème

$$(H^{(k_n)}) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} t^{k_n}\, dV = M_n \qquad (n \geqq o)$$

admette une solution. Indiquer des conditions portant sur les k_n et les M_n pour qu'une telle solution, avec $V(-\infty) = o$, soit unique.

La réponse la plus complète pour les problèmes d'unicité $(S^{(n)})$ et $(H^{(n)})$ a été fournie par Carleman (*voir* [10]).

La voici, sous une forme distincte de celle donnée par Carleman, mais qui lui est équivalente.

Pour que la solution du problème $(S^{(n)})$ soit unique [avec $V(o) = o$], il suffit que

$$(60) \qquad \sum \left(\frac{m_n}{m_{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}} = \infty \quad (1).$$

Pour que la solution du problème $(H^{(n)})$ soit unique [avec $V(-\infty) = o$], il suffit que

$$(61) \qquad \sum \left(\frac{m_{2n}}{m_{2n+1}}\right)^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Ces théorèmes apparaîtront comme des cas particuliers de nos théorèmes généraux concernant respectivement les problèmes $(S^{(k_n)})$ et $(H^{(k_n)})$.

Notons que le problème d'unicité $(S^{(k_n)})$ a déjà été traité, d'une part, par Boas [2] et, d'autre part, par Fuchs [4]. Tous les deux ont étudié le cas où les k_n sont réels positif, sans les supposer entiers. Le théorème de Boas ne contient pas comme cas particulier le théorème de Carleman concernant le problème $(S^{(n)})$ Celui de Fuchs le contient. Comme nous l'avons dit plus haut, notre théorème concernant $(S^{(k_n)})$ englobe celui de Carleman sur $(S^{(n)})$. Remarquons que d'une condition d'unicité concernant un problème (H) on peut tirer une condition d'unicité concernant (S), mais non réciproquement. Notre méthode, contrairement à celle des auteurs cités, permet de fournir une réponse aux problèmes des deux espèces.

---

(1) Shohat et Tamarkin [10] consacrent plusieurs pages à une « amélioration » du théorème de Carleman. Par exemple, pour le problème (S), ils remplacent la condition de Carleman $\Sigma m_n^{-\frac{1}{2n}} = \infty$ par $\Sigma \beta_n^{-\frac{1}{n}} = \infty$, où $\beta_n = \min_{k \leq n} m_k^{\frac{1}{k}}$. Mais, de la convexité de $\log m_n$, démontrée plus haut, il résulte que pour n assez grand $\beta_n = m_n^{\frac{1}{n}}$ $\left(\text{si } \lim m_n^{\frac{1}{n}} = \infty\right)$. Une remarque analogue est valable pour le problème (H) (en remplaçant m_n par m_{2n}).

Notre méthode consiste en l'application du théorème préliminaire I (concernant les séries asymptotiques).

2. Nous allons démontrer les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I [UNICITÉ($S^{(k_n)}$)]. — *Soit* $\{k_n\}$ *une suite d'entiers non négatifs, croissants, avec* $k_0 = 0$, *et soit* $\{\lambda_n\}$ *la suite complémentaire à la suite* $\{k_n\}$ *par rapport à la suite de tous les entiers non négatifs. Soit* $\{M_n\}$, *une suite positive* $(n \geq 0)$.

Supposons qu'il existe une fonction non décroissante $V = V(t)\ (t \geq 0)$, $V(0) = 0$, *telle que*

$$(S^{(k_n)}) \qquad \int_0^\infty t^{k_n}\, dV = M_n \qquad (n \geq 0).$$

Si l'une des conditions $U_i(\lambda_n, k_n, M_n, 1)$ *est satisfaite, cette solution est unique.*

THÉORÈME II [UNICITÉ ($H^{(k_n)}$)]. — *Soit* $\{k_n\}$ *une suite d'entiers non négatifs croissants, avec* $k_0 = 0$, *et soit* $\{\lambda_n\}$ *la suite complémentaire à la suite* $\{k_n\}$ *par rapport à la suite de tous les entiers non négatifs. Soit* $\{M_n\}$, *une suite réelle.*

Supposons qu'il existe une fonction non décroissante $V = V(t)\ (-\infty < t < \infty)$, $V(-\infty) = \lim_{t=-\infty} V(t) = 0$, *telle que*

$$(H^{(k_n)}) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} t^{k_n}\, dV = M_n \qquad (n \geq 0).$$

Posons $M'_n = M_n$ *si* k_n *est pair, et* $M'_n = \infty$ *si* k_n *est impair.*

Si l'une des conditions $U_i\left(\lambda_n, k_n, M'_n, \frac{1}{2}\right)$ *est satisfaite, cette solution est unique.*

On se rend immédiatement compte que si $k_n = n\ (n \geq 0)$, c'est-à-dire si l'ensemble $\{\lambda_n\}$ est vide $(\overline{D}(\gamma k_n) = 0)$, l'hypothèse $U_6(\lambda_n, k_n, M_n, 1)$ du théorème I devient la relation (60) et $U_6\left(\lambda_n, k_n, M'_n, \frac{1}{2}\right)$ du théorème II devient (61) (avec respectivement $\lim M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, $\lim M_n^{\frac{1}{2n}} = \infty$). Comme, dans le problème $(S^{(k_n)})$, la ligne polygonale liant les points $(k_n, \log M_n)$ est convexe, on a $\underline{\lim} M_n^{\frac{1}{k_n}} = \lim M_n^{\frac{1}{n}}$, et, par conséquent la condition $U_8(\lambda_n, k_n, M_n, 1)$ du théorème I devient (si $k_n = n$) la condition (60), avec $\underline{\lim} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty$. Une remarque analogue est valable pour le théorème II.

Autrement dit, les théorèmes de Carleman, concernant les problèmes $(S^{(n)})$ et $(H^{(n)})$ sont bien des cas particuliers respectivement des théorèmes I et II.

3. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES I ET II. — Soient $V_1(t)$ et $V_2(t)$ deux fonctions croissantes $(t \geq 0)$, $V_1(0) = V_2(0) = 0$, telles que

$$(62) \qquad \int_0^\infty t^{k_n}\, dV_1 = \int_0^\infty t^{k_n}\, dV_2 = M_n \qquad (n \geq 0),$$

et posons, pour $a \geq 0$,

$$F_a(s) = \int_0^\infty \frac{dV_1 - dV_2}{e^{s-a} + t}. \tag{63}$$

Soit Δ un domaine du plan $s = \sigma + it$ contenant l'axe $\sigma > 0$ et dont la frontière est composée du segment $\sigma = 0$. $|t| < \frac{\pi}{2}$ et des courbes $\sigma \geq 0$, $t = \pm \arcsin e^{-\sigma} = \pm \pi g(\sigma)$, $g(\sigma) > 0$ tendant en croissant vers 1. On a, évidemment

$$\int^\infty \big(1 - g(\sigma)\big)\, d\sigma < \infty.$$

On a aussi, dans Δ, $t \geq 0$

$$|e^{s-a} + t| \geq e^{-a}. \tag{64}$$

$F_a(s)$ est, par conséquent, holomorphe dans $\bar{\Delta}$ avec

$$|F_a(s)| \leq e^a \left(\int_0^\infty dV_1 + \int_0^\infty dV_2 \right) = 2M_0 e^a. \tag{65}$$

On a aussi dans Δ, pour tout $p \geq 1$

$$F_a(s) = \sum_1^p a_k e^{-ks} + (-1)^{p-1} e^{-ps-a} F_n^{(a)}(s), \tag{66}$$

où

$$a_k = (-1)^{k-1} e^{ka} \int_0^\infty t^{k-1} (dV_1 - dV_2), \tag{67}$$

$$F_n^{(a)}(s) = \int_0^\infty \frac{t^n (dV_1 - dV_2)}{e^{s-a} + t}. \tag{68}$$

Posons

$$\int_0^\infty t^n\, dV_1 = m'_n, \qquad \int_0^\infty t^n\, dV_2 = m''_n.$$

On a ainsi

$$m'_{k_n} = m''_{k_n} = M_n \quad \text{et} \quad a_{k_{n+1}} = 0 \qquad (n \geq 0).$$

Et, d'après (64) et (68), on a dans Δ

$$|F_n^{(a)}(s)| \leq e^a (m'_n + m''_n).$$

On peut donc écrire, pour s variant dans Δ, pour tout $n \geq 1$

$$\left| F_a(s) - \sum_1^n d_n^{(a)} e^{-(\lambda_k + 1)s} \right| \leq e^{-q(\sigma - a)} e^a (m'_q + m''_q), \qquad (\lambda_n + 1 \leq q < \lambda_{n+1} + 1), \tag{69}$$

où

$$d_k^{(a)} = e^{(\lambda_k + 1)a} (m'_{\lambda_k} - m''_{\lambda_k}),$$

Posons

$$m_q^{(a)} = e^{(q+1)a}(m'_q + m''_q),$$
$$p_a(\sigma) = \overline{\underset{q\geq 1}{\text{borne}}}(q\sigma - \log m_q^{(a)}).$$

On a l'inégalité suivante :

$$(70)\quad p_a(\sigma) = \overline{\underset{q\geq 1}{\text{borne}}}[q\sigma - (q+1)a - \log(m'_q + m''_q)]$$
$$\geq \overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}[k_n\sigma - (k_n+1)a - \log(m'_{k_n} + m''_{k_n})]$$
$$= -\log 2 - \log a + \overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}[k_n(\sigma - a) - \log M_n] = p(\sigma - a) - \log 2 - \log a,$$

où l'on a posé

$$p(\sigma) = \overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}(k_n\sigma - \log M_n).$$

Remarquons que la densité moyenne supérieure de la suite $\{\lambda_n + 1\}$ est celle de $\{\lambda_n\}$, et que la fonction de densité de $\{\lambda_n + 1\}$ est inférieure ou égale à celle de $\{\lambda_n\}$; la fonction d'excès de $\{\lambda_n + 1\}$ n'est donc pas supérieure à celle de $\{\lambda_n\}$.

Il devient alors clair que l'hypothèse $U_1(\lambda_n, p(\sigma), 1)$ implique l'hypothèse $U_1(\lambda_n + 1, p(\sigma - a), 1)$, et d'après (70), l'hypothèse $U_1(\lambda_n + 1, p_a(\sigma), 1)$, c'est-à-dire l'hypothèse $U_1(\lambda_n + 1, n, m_n^{(a)}, 1)$. Les relations (65) et (69) permettent alors d'appliquer le théorème préliminaire I, ce qui donne

$$(71)\qquad |d_n^{(a)}| = e^{(\lambda_n+1)a}|m'_{\lambda_n} - m''_{\lambda_n}| \leq 2A(\lambda_n + 1)\overline{\Lambda}_n^* M_0 e^{a} e^{(\lambda_n+1)u},$$

où $\{\overline{\Lambda}_n^*\}$ est la suite associée à la suite $\{\lambda_n + 1\}$ et où A et u sont indépendants de a et de n.

Comme $\lambda_n \geq 1$, on obtient, en fixant n et en faisant tendre a vers $+\infty$; $m'_{\lambda_n} = m''_{\lambda_n}(n \geq 1)(d_n^{(a)} = 0, n \geq 1)$.

Ainsi, pour $a = 0$, (69) peut s'écrire maintenant sous la forme suivante :

$$|F_0(s)| \leq 2\,\overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}\, e^{-k_n\sigma} M_n = 2\,e^{-p\sigma] \qquad (s \in \Delta).$$

Mais il résulte, en particulier, de la condition U_1 que

$$\int^{\infty} p(\sigma)\, e^{-\frac{\sigma}{2}}\, d\sigma = \infty.$$

Il résulte alors du théorème I de [8] (qui dans le cas actuel, n'est qu'une transcription d'un théorème classique) que $F_0(s) \equiv 0$. On a, en définitive

$$\int_0^{\infty} \frac{dV_1}{z - t} = \int_0^{\infty} \frac{dV_2}{z - t},$$

ce qui prouve que $V_1 - V_2$ est une constante, mais comme $V_1(0) = V_2(0) = 0$, notre théorème est démontré.

La démonstration du théorème II ne diffère guère de celle du théorème I. La différence ne concerne que la *largeur* du domaine Δ $\left(g(\sigma)\right.$ tend, cette fois-ci, en croissant vers $\left.\frac{1}{2}\right)$ et la définition de la fonction $F_a(s)$ qui devient

$$F_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV_1 - dV_2}{-i e^{s-a} + t}.$$

Bibliographie.

1. S. Bernstein, *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation*, Paris, Gauthier-Villars, 1926.
2. R. P. Boas, *Density theorems for power series and complete sets* (*Transactions of the American Mathematical Society*, t. **61**, 1937, p. 54).
3. T. Carleman, *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique* (*Uppsala Universitets Arsskrift*, 1923).
4. W. H. J. Fuchs, *On a generalization of the Stieltjes moment problem* (*Bulletin of the American Mathematical. Society*, t. **25**, 1946, p. 1057).
5. S. Izumi et T. Kawata, *Quasi-analytic class and closure of* $\{t^n\}$ *in the interval* $(-\infty, \infty)$. (*The Tôhoku Mathematical Journal*, t. **43**, 2e partie, 1937, p. 267).
6. S. Mandelbrojt, *Sur une inégalité fondamentale* (*Annales de l'École Normale Supérieure*, t. **63**, 1946, p. 351).
7. S. Mandelbrojt, *Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions*. Gauthier-Villars, Paris, 1935.
8. S. Mandelbrojt et G. R. Mac-Lane, *On fonctions holomorphic in a strip region, and an extension of Watson's problem* (*Transactions of the American Mathematical Society*, t. **61**, 1947, p. 454).
9. R. E. A. C. Paley et N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*. (*Colloquium Publications*, t. **19**, American Mathematical Society, 1934).
10. J. A. Shohat et J. D. Tamarkin, *The problem of moments* (*Mathematical Surveys*, n° **1**, American Mathematical Society, 1943).

LA

CLASSIFICATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

DE

COURBES ALGÉBRIQUES PLANES DE GENRE QUATRE

PAR MM. F. JONGMANS ET L. NOLLET.

INTRODUCTION.

Nous nous proposons de déterminer, d'une manière aussi complète et précise que possible, les systèmes linéaires crémoniennement distincts de courbes algébriques planes irréductibles de genre 4. Pour rapprocher nos résultats de ceux déjà obtenus au sujet des courbes de genre moins élevé, nous prendrons comme types de référence les systèmes d'ordre minimum.

Deux Mémoires récents servent de base à la présente étude. Le premier, dû à M. Jongmans, contient la détermination des surfaces à sections hyperplanes de genre 4, c'est-à-dire des systèmes linéaires *simples* de courbes de genre 4; nous le désignerons par la notation [J]. Il expose la matière de notre premier Chapitre de façon moins détaillée, voire parfois un peu sommaire, en raison du fait qu'il n'étudie les surfaces envisagées qu'en vue d'atteindre les variétés à trois dimensions dont ces surfaces sont les sections hyperplanes. Dans ce Mémoire [J] est appliquée pour la première fois une méthode de recherche des systèmes linéaires de courbes planes de genre au moins égal à 4 dont l'adjoint pur n'est pas composé au moyen d'une involution ou d'un faisceau.

Le second Mémoire, qui répondra à la notation [N], est dû à M. Nollet et s'occupe au contraire des systèmes linéaires dont l'adjoint pur n'est pas simple, sans préciser numériquement le genre des courbes considérées. Appliqués aux courbes de genre 4, ses résultats et ses méthodes, qui concernent aussi quelquefois les systèmes simples, permettent de traiter la presque totalité des cas laissés de côté dans [J].

Il convenait de réunir en une seule étude l'exposé complet des connaissances acquises sur les systèmes linéaires de courbes de genre 4; c'est ce que nous avons l'intention de réaliser. Nous ne nous bornerons pas à définir arithmétiquement les systèmes d'ordre minimum par leur ordre et les multiplicités aux points-base, mais nous examinerons de près leur existence et, en général, nous les construirons effectivement. De plus, tandis que la méthode arithmétique de Noether, quand elle n'est pas doublée d'une étude géométrique, ne distingue pas entre eux plusieurs systèmes de mêmes caractères numériques projectifs, mais qui ne possèdent pas la même suite d'adjoints purs, nous classerons précisément les systèmes de genre 4 d'après les caractères invariants de leurs adjoints. Nous parvenons ainsi à des résultats plus précis et plus complets que ceux obtenus jusqu'ici pour les systèmes de courbes de genre 3.

Notre plan de travail consiste à étudier d'abord les systèmes $|C|$ de genre 4 dont l'adjoint pur a le genre effectif p_1 inférieur à 4, en supposant successivement cet adjoint simple, puis composé au moyen d'une involution ou enfin d'un faisceau; ensuite, vient l'examen des systèmes pour lesquels p_1 vaut au moins 4. Nous désignerons respectivement par $|C'|$ et $|C_1|$ les adjoints impur et pur du système $|C|$. Pour exprimer que $|C|$ est d'ordre n et possède a points-base r-uples M_i, b points s-uples N_j, ..., nous désignerons le système par $C^n(aM^r, bN^s, \ldots)$; en général (1), nous renseignons les multiplicités effectives. Un système dérivé d'un autre par acquisition de points-base simples sera dit système *subordonné* à cet autre. Les références bibliographiques, placées à la fin du Mémoire, se rapportent aux numéros en chiffres romains mis entre crochets dans le texte.

Il pourra sembler que nous poussons parfois trop loin la minutie. Nous répondrons à cela que nous tenons simplement compte de quelques propriétés indiscutables, mais qui sont loin d'avoir toujours été respectées dans les travaux publiés sur les systèmes de courbes planes. Parmi ces propriétés figure en bonne place le fait qu'un même système linéaire (par exemple d'ordre minimum) peut très bien être simultanément l'adjoint de plusieurs systèmes irréductibles qui ne rentrent pas dans un même système linéaire. Un exemple classique est le faisceau de cubiques elliptiques $E^3(9M_i^1)$, adjoint commun d'une multiplicité continue de systèmes de genre 2, $C^7(M_1^3, 8M_i^2, 2N_j^2)$, dont les points-base N_1, N_2 forment l'intersection d'une droite quelconque issue de M_1 avec la courbe unie de l'involution des couples communs aux cubiques E^3 et aux droites issues de M_1; le faisceau considéré est encore l'adjoint du système des sextiques $H^6(M_1^6, 8M_i^2)$, puis de tous les systèmes déduits des précédents par permutations des points M_i ou par une transformation crémonienne qui

(1) Dans certains cas, notamment quand nous décrivons les courbes fondamentales des systèmes linéaires obtenus, nous usons forcément de multiplicités virtuelles; quand celles-ci ne sont pas effectives, le lecteur observera que les systèmes correspondants constituent des cas particuliers.

conserve le faisceau. Des exemples non moins significatifs seront rencontrés plus loin.

Un autre fait, sur lequel nous avons déjà attiré l'attention dans les travaux cités, est le danger que présente l'emploi des caractères virtuels. A cet égard, nous devons rappeler, pour la compréhension du texte, que la relation classique d'adjonction $|(E+F)'|=|E'+F+\Sigma A_i|$, où nous désignons par des lettres accentuées les adjoints impurs et où ΣA_i désigne la somme des points-base du seul système $|F|$, est une équivalence virtuelle et ne saurait servir au calcul des caractères effectifs de systèmes adjoints purs. Tout ce qu'il est permis d'en déduire en général, c'est que l'adjoint pur de $|E+F|$ contient celui de $|E|$, et même la somme de ce dernier et de la partie variable de $|F|$ quand $|F|$ est infini. Cette propriété est largement employée dans le Mémoire [N].

Enfin, rappelons que non seulement les courbes adjointes (impures) d'un système $|C|$ peuvent passer plus de $r-1$ fois en un point r-uple M de $|C|$, mais qu'elles peuvent aussi y passer moins de $r-1$ fois si M n'est pas un point propre, par le jeu du « principe de déchargement » (scaricamento) (¹). Il serait imprudent de négliger cette circonstance dans la considération de systèmes d'ordre minimum, qui, précisément, sont souvent contraints de posséder des points-base impropres.

CHAPITRE I.

SYSTÈME ADJOINT SIMPLE, DE GENRE $p_1<4$.

1. Supposons que l'adjoint pur $|C_1|$ d'un système $|C|$ de genre 4 soit irréductible et simple. Sa dimension est égale à 3; son genre effectif p_1 et son degré effectif m_1 sont liés par la relation $m_1=p_1+2$, à moins que $|C_1|$ ne soit surabondant (par rapport à sa base propre). Dans ce dernier cas, la série caractéristique $g^2_{m_1}$ de $|C_1|$ est spéciale, avec les conditions $p_1<4$, $2p_1-2\geq m_1\geq 4$, dont la dernière est celle de Clifford. Nous avons ainsi à passer en revue les hypothèses

$$p_1=0,\quad m_1=2;\qquad p_1=1,\quad m_1=3;\qquad p_1=2,\quad m_1=4;\qquad p_1=3,\quad m_1=5 \text{ ou } 4.$$

Comme la classification des systèmes simples de genre 0, 1, 2 ou 3 est acquise, notre tâche est de découvrir $|C|$ à partir d'un adjoint connu $|C_1|$. L'image projective de $|C_1|$ est une surface rationnelle F, normale dans l'espace S_3, sur laquelle les courbes C ont pour homologues des sextiques projectivement canoniques de genre 4, dépourvues de points singuliers et situées chacune sur une seule quadrique, irréductible, dont elles constituent l'intersection

(¹) Pour des exemples, *cf.* le Mémoire [N], n° 19, et le présent travail.

complète avec une surface cubique. Par suite, *le système* $|C|$ *doit être cherché au sein de* $|2C_1|$ *ou, exceptionnellement, de* $|3C_1|$ *si l'image de* $|C_1|$ *est une quadrique* ($m_1 = 2$, $p_1 = 0$). Cette propriété, qui permet d'amorcer la discussion, s'étend d'ailleurs aux systèmes de genre quelconque, par une interprétation hyperspatiale analogue.

2. Abordons la discussion par le cas $p_1 = 0$, $m_1 = 2$. L'image projective de $|C_1|$ est une quadrique F, conique ou non, sur laquelle toute sextique de genre 4 est découpée par une surface cubique (qui ne passe pas au point double éventuel de F). Le système complet $|3C_1|$ est effectivement de genre 4 et admet $|C_1|$ pour adjoint pur. Si nous prenons pour $|C_1|$ le système des coniques à deux points-base, distincts ou non, $|C|$ est le système des sextiques à deux points triples, ou un système subordonné. $C^6(2M^3)$ a la dimension 15 et le degré 18; il est d'ordre minimum, car un système de quintiques à deux points-base doubles a au plus le degré 17. En revanche, tout système subordonné est réductible à un système de quintiques à deux points doubles, d'ordre minimum.

Les systèmes $|C|$ *de genre* 4, *d'ordre minimum, dont l'adjoint est irréductible et de genre* 0, *sont* $C^6(2M^3)$, $C^5(2M^2)$ *ou subordonnés à ce dernier.*

3. Si $|C_1|$ est elliptique et de degré 3, son image est une surface cubique non réglée F. Toute sextique canonique tracée sur F est l'intersection complète de F avec une quadrique. Le système complet $|2C_1|$ répond à la question. En prenant pour $|C_1|$ un système de cubiques elliptiques à 6 points-base simples, on voit que $|C|$ est l'ensemble des sextiques à 6 points doubles fixes, ou un système subordonné; il est de toutes façons d'ordre minimum, puisque son adjoint pur $|C_1|$ est en même temps son adjoint impur et a l'ordre minimum. $C^6(6M^2)$ a la dimension 9 et le degré 12.

Les systèmes $|C|$ *d'ordre minimum dont l'adjoint est irréductible et elliptique sont* $C^6(6M^2)$ *et les systèmes subordonnés.*

4. Passons au cas $p_1 = 2$, $m_1 = 4$. On sait [I, III] que tout système simple de genre 2 et de dimension 3 est crémoniennement réductible à $|C_1| = C^4(M^2, 8N_i^1)$; il ne doit passer qu'une cubique D par M et $8N_i$, sans quoi $|C_1|$ appartiendrait à une involution du second ordre.

L'image de $|C_1|$ est une surface F du quatrième ordre, douée d'une droite double d, image de D. Une sextique K de genre 4 tracée sur F est découpée par une quadrique Q, dont l'intersection ultérieure avec F est une section plane de Q. Celle-ci ne se compose pas de la droite d comptée deux fois, sinon Q serait un cône de sommet situé sur d et K aurait un point double au sommet. La section plane envisagée de Q ne contient pas non plus la droite d comptée une

fois, sinon K admettrait d pour composante et ne serait pas irréductible. En conséquence, l'intersection de F et de Q, en dehors de K, est une conique astreinte à passer aux deux points de percée de d dans Q; dans la représentation plane, elle a pour image une droite L issue de M. Tout système $|C|$ qui répond à la question est donc contenu dans le système

$$|2C_1 - L| = |C_1 + D| = C^7(M^3, 8N_i^2) \quad (^1).$$

Ce dernier système est de dimension virtuelle 5, il n'admet pas D pour composante fixe et est irréductible. Sa dimension est d'ailleurs trop élevée pour qu'il puisse être surabondant, c'est-à-dire acquérir des points-base accidentels sur D. Par suite, il a le genre effectif 4, le degré 8 et la dimension 5. Il admet bien $|C_1|$ pour adjoint et est donc d'ordre minimum.

Les systèmes $|C|$ *d'ordre minimum à système adjoint simple de genre* 2 *sont* $C^7(M^3, 8N_i^2)$ *et les systèmes subordonnés, quand il passe une seule cubique par* M *et* $8N_i$. Observons que deux points N ne peuvent être proches de M.

5. Supposons maintenant que $|C_1|$ soit de genre 3 et de degré 5, formé de courbes non hyperelliptiques. Suivant que l'adjoint pur $|C_2|$ de $|C_1|$ est de genre 0 ou 1, $|C_1|$ est référable à $C^4(11M_i^1)$ ou à $C^6(7M_i^2, 3N^1)$ [II]. Examinons le premier cas.

Les 11 points-base de $|C_1|$ n'appartiennent pas à une même cubique, car les droites du plan formeraient avec cette cubique un réseau extrait de $|C_1|$ et ce dernier système, triplement infini, aurait un douzième point-base sur la cubique considérée. $|C_1|$ a pour image une surface F du cinquième ordre, douée d'une cubique gauche double h, généralement irréductible [II]. Celle-ci a pour homologue dans la représentation plane une courbe particulière $H^7(11M_i^2)$. Une sextique K de genre 4 tracée sur F appartient à une quadrique Q, qui rencontre ultérieurement F suivant une biquadratique d. Si celle-ci ne dégénère pas, elle a pour homologue dans le plan R de $|C_1|$ une courbe D d'ordre au plus égal à 1, sinon $|2C_1 - D|$ serait d'ordre insuffisant pour admettre l'adjoint $|C_1|$. Pour correspondre à une droite D, la biquadratique d doit être rationnelle et posséder un point double, évidemment situé sur la cubique double h. Il existe effectivement de telles courbes d; ce sont les homologues des droites D qui joignent deux à deux les points des couples de la série g_2^1 découpée par $|C_1|$ sur H.

Il y a donc des présomptions pour que des solutions C soient contenues dans le système $|2C_1 - D| = C^7(11M_i^2)$. Celui-ci possède la dimension virtuelle 2, le genre virtuel 4 et le degré virtuel 5. Il constitue un système $|C|$ du type désiré si nous démontrons qu'il est irréductible et dépourvu de points-base multiples

(1) Le théorème du reste ne semble pas respecté, puisque par une courbe K passe une seule quadrique, qui ne découpe pas sur K le faisceau complet des sections planes par d; mais on remarquera que les quadriques de l'espace ne découpent pas sur F un système complet.

accidentels. Nous donnons cette démonstration dans le cas générique, c'est-à-dire quand F est la surface générique du cinquième ordre qui passe doublement par une cubique gauche irréductible h. En combinant à une surface particulière de ce type une surface composée de deux quadriques circonscrites à h et d'un plan générique, on voit que la surface F générique n'admet que des points doubles sur h. Chaque cône projetant h d'un de ses points rencontre ultérieurement F suivant une biquadratique d avec un nœud au sommet du cône. Les courbes d relatives à deux cônes analogues se rencontrent en un seul point variable, marqué sur F par la corde de h commune aux cônes. Le faisceau des quadriques menées par une courbe d découpe sur F un faisceau de sextiques projectivement canoniques K avec 5 points fixes aux intersections simples de h et de d, mais sans composante fixe ni points fixes extérieurs à d. L'ensemble des faisceaux analogues déduits de toutes les courbes d correspond précisément au réseau $C^7(11M_i^2)$ du plan R. Il ne possède aucun point fixe sur F, puisque deux courbes d se rencontrent en un seul point variable sur F; il n'a pas de composante fixe et n'est évidemment pas composé au moyen d'un faisceau. Le système $C^7(11M_i^2)$ est donc généralement irréductible, dépourvu de points-base accidentels et a exactement la dimension 2.

6. Nous nous devons à présent d'abandonner le cas générique et de vérifier s'il n'existe pas, quelle que soit la configuration des 11 points-base de $|C_4|$, des systèmes $|C|$ distincts de $C^7(11M_i^2)$ qui admettent l'adjoint $C^4(11M_i^1)$. Il restera enfin à savoir si, pour une position particulière des $11M_i$, le système $C^7(11M_i^2)$, tout en restant irréductible et de genre 4, ne peut devenir de dimension supérieure à 2.

Si $|K|$ est l'homologue sur F d'un système $|C|$ répondant à la question, mais distinct de $C^7(11M_i^2)$, il faut évidemment, par ce qui précède, exclure l'éventualité que les quadriques menées par toutes les courbes K découpent ultérieurement sur F des biquadratiques d en nombre infini. La seule hypothèse plausible est qu'il existe une seule biquadratique d, image d'une courbe d'ordre o du plan R (1); $|C|$ est alors au plus un faisceau et ne peut contenir $C^7(11M_i^2)$. Nous allons prouver l'inexistence de $|C|$. Un tel système serait d'ordre 8 et admettrait une droite fondamentale D, composante fixe de son adjoint impur. Il ne saurait posséder de points-base de multiplicité supérieure à 3, car un de ces points serait propre, triple au moins pour l'adjoint impur et double pour l'adjoint pur $C^4(11M_i^1)$. En outre, $|C|$ n'admet pas plus de 2 points triples s'il est d'ordre minimum, mais doit en admettre au moins 1, sinon il posséderait 17 points doubles, dont 6 au moins sur la droite fondamentale D. Si $|C|$ possède 1 point triple et 14 points doubles, D doit de nouveau contenir

(1) Nous n'insistons pas sur le cas où d serait réductible et aurait pour image une droite issue d'un des $11M_i$; il ne saurait donner d'autres courbes de genre 4 que $C^7(11M_i^2)$.

le premier et 4 des seconds, ce qui est impossible; si enfin $|C|$ possède 2 points triples et 11 points doubles, D contient les 2 premiers et 2 des seconds. Dans tous les cas, la conclusion est absurde. Un peu d'attention montrera que les considérations précédentes tiennent quand il existe des points-base impropres.

D'autre part, le système $C^7(11M_i^2)$, quand il est irréductible, est toujours un réseau. En effet, si ce système devient surabondant, sa série caractéristique est spéciale, précisément une g_4^2, puisque C n'est pas hyperelliptique; $|C|$ est un système simple de dimension 3, degré 5 et genre 4, qui peut servir de représentation plane à une surface G du cinquième ordre de l'espace ordinaire. G possède une conique double, éventuellement réduite à deux droites coplanaires, distinctes ou non, ou encore deux droites doubles gauches, qui peuvent être infiniment voisines. Dans la première hypothèse, les quadriques menées par la conique double découpent sur G un système ∞^4 de sextiques irréductibles de genre 4 et de degré 6, cela quelles que soient les particularités de G sur la conique double, puisque ce système contient celui des sections planes de G; en d'autres termes, $|C|$ doit être contenu dans un système plus ample de même genre, dont l'adjoint, devant contenir $|C_1|$ sans être de dimension supérieure à 3, se réduit à $|C_1|$. Cette propriété est d'ailleurs un cas particulier d'un théorème général contenu dans le Mémoire [N], Chapitre V, n° 33. Elle conduit ici à une absurdité, puisque nous avons reconnu il y a un instant que seul $C^7(11M_i^2)$ et les systèmes surbordonnés admettent $|C_1|$ comme adjoint.

Si, au contraire, G admet deux droites doubles gauches, la congruence des rayons incidents à celles-ci est en correspondance birationnelle avec G et marque dans un plan quelconque la représentation plane de G. Les sections planes de G ont pour images un système de sextiques à 2 points triples et 13 points simples fixes, qui ne peut être équivalent à un système $C^7(11M_i^2)$ d'ordre minimum.

En résumé, *les seuls systèmes* $|C|$ *d'ordre minimum dont l'adjoint pur est de genre* 3 *et de degré* 5, *non hyperelliptique et doué d'un adjoint de genre* 0, *sont le réseau* $C^7(11M_i^2)$ *et les systèmes subordonnés, d'existence effective.*

En dehors de la restriction préalable que les $11M_i$ n'appartiennent pas à une cubique, certaines conditions sont requises pour que $C^7(11M_i^2)$ soit irréductible; il faut que 4 des $11M_i$ ne soient jamais en ligne droite, et que 8 d'entre eux n'appartiennent jamais à une conique.

7. D'après le n° 5, nous avons ensuite à déterminer les systèmes $|C|$ d'adjoint $|C_1| = C^6(7M^2, 3N^1)$. Observons d'abord que les points-base de C^6 ne doivent pas appartenir à une cubique, sans quoi $|C_1|$ admettrait un point-base accidentel sur celle-ci. $|C_1|$ a pour image une surface quintique F douée de trois droites doubles d_j, représentées dans le plan R de $|C_1|$ par les trois cubiques $D_j^3(7M^1, 2N^1)$; ces droites forment un trièdre de sommet O, point triple impropre pour F, car il correspond au terne neutre formé des intersections deux à deux des cubiques D_j.

Nous pouvons reprendre des raisonnements analogues à ceux du cas précédent. S'il existe sur F un système $|K|$ de sextiques de genre 4, homologue d'un système $|C|$ d'adjoint $|C_1|$, les quadriques qui passent par les courbes K rencontrent ultérieurement F suivant des biquadratiques d représentées dans R par des courbes d'ordre au plus égal à 3. Si les courbes d sont irréductibles, elliptiques et en nombre infini, il leur correspond nécessairement dans R des cubiques elliptiques D, irréductibles, qui passent une fois en chaque point-base M_i, propre ou impropre, sinon les conditions d'adjonction seraient impossibles à respecter par l'adjoint impur $|C'| = |C_1|$. En revanche, les courbes D ne passeront en aucun point N_j. Le système $|2C_1 - D| = C^9(7M_i^3, 3N_j^2)$ possède virtuellement le genre 4 et la dimension 3. Il constitue une solution si nous établissons qu'il est irréductible et dépourvu de points-base multiples accidentels.

Puisque sa dimension virtuelle vaut 3 et qu'une biquadratique d permet de construire une simple infinité de courbes K, les courbes d dépendent de deux paramètres, c'est-à-dire que les cubiques D forment le réseau $D^3(7M_i')$ complet. Ceci permet aussi d'affirmer que 3 est la dimension effective du système trouvé. Les courbes du réseau $|d|$ s'appuient en deux points variables sur chaque droite double d_j et ne passent pas en O; deux courbes d ont en commum deux points variables alignés sur O. Les quadriques menées par une courbe d rencontrent encore F suivant un faisceau de sextiques K de genre 4, avec 6 points communs situés par couples sur les d_j. Les courbes K relatives à toutes les courbes d n'ont donc pas de points fixes sur F; elles n'ont pas de composante commune et ne sont pas composées au moyen des courbes d'un faisceau. $C^9(7M^3, 3N^2)$ est donc un système irréductible de genre 4, de dimension 3 et de degré 6.

De nouveau, il y a lieu d'examiner s'il existe des systèmes $|C|$ distincts du précédent et d'adjoint $|C_1|$, ou, ce qui revient au même, si les biquadratiques d, intersections résiduelles de F avec les quadriques Q menées par les sextiques K homologues de C, peuvent avoir pour transformées dans R d'autres courbes que $D^3(7M')$. Les quadriques Q ne peuvent passer doublement au point triple O de F, sinon O serait au moins quintuple pour les courbes d. Supposons successivement qu'elles ne passent pas en O et qu'elles y passent simplement.

Dans le premier cas, chaque courbe d, irréductible ou non, est bisécante aux trois droites doubles d_j, de sorte que le faisceau de quadriques de base d renferme un cône de sommet O passant par les trois droites d_j. Dans le second cas, Q ne peut contenir une droite d_j sans qu'on trouve pour $|C|$ un système d'ordre inférieur à 9 ou, de nouveau, un système subordonné à $C^9(7M^3, 3N^2)$ si Q contient en outre les droites images de $2N_j$; en admettant donc que Q ne passe par aucune droite d_j, la courbe d passe au moins doublement en O et rencontre encore une fois chaque d_j; le faisceau de quadriques de base d renferme une quadrique soumise à contenir un point d'une droite d_j non située dans le plan tangent commun en O, c'est-à-dire un cône mené par les trois droites d_j.

Dans les deux cas considérés, la biquadratique d est adjointe aux sections planes de la surface F et a pour image une courbe D du réseau $D^3(7M^1)$. Le seul accident qui puisse infirmer les résultats déjà obtenus est la dégénérescence de D en deux courbes dont l'une, fondamentale pour $|C_4|$, doit être défalquée de D quand on veut obtenir l'image proprement dite de d. Cette courbe fondamentale représente un point double P de F, double aussi pour d, de sorte que toute quadrique Q contenant d recoupe F suivant une sextique K dont l'image appartient au système $|2C_4 - D| = C^9(7M^3, 3N^2)$. Nous concluons :

Les seuls systèmes $|C|$ *d'ordre minimum dont l'adjoint pur est de genre* 3 *et de degré* 5, *formé de courbes non hyperelliptiques, sont les systèmes mentionnés au* n° 6 *ou* $C^9(7M^3, 3N^2)$, *de dimension et degré effectifs* 3, 6, *et les systèmes subordonnés.*

8. Toujours dans l'hypothèse $p_4 = 3$, $m_4 = 5$, nous rencontrons le cas où le système adjoint $|C_4|$ est simple et formé de courbes hyperelliptiques. Son adjoint pur est alors composé au moyen d'un faisceau de courbes rationnelles, qu'on peut réduire à un faisceau de rayons. Dans ces conditions, $|C_4|$ est réductible au type $C^{n+2}(M^n, n-3N^2, 11P^1)$. En outre, on pourra supposer que l'ordre de $|C_4|$ ne peut être abaissé par *une* transformation quadratique dont M est un point fondamental; alors, pour $n > 3$, tous les points N sont dans le domaine du premier ordre de M ou, éventuellement, proches de M, tandis que les 11 points P se répartissent sur une ou plusieurs branches d'origine M: n est visiblement inférieur à 6.

L'image projective de $|C_4|$ doit être une surface F du cinquième ordre douée d'une droite triple d; la surface générique de ce type admet d'ailleurs la représentation correspondant à $n = 3$. Pour notre objet, F ne doit pas avoir de point quadruple, sinon une représentation plane s'obtient immédiatement par projection de ce point, le système représentatif $|C_4|$ est du cinquième ordre et toute sextique canonique tracée sur F a pour homologue une courbe plane d'ordre au plus égal à 6, donc trop faible pour admettre $|C_4|$ comme adjoint. Par suite, les coniques h découpées sur F par les plans contenant la droite triple d ne peuvent avoir de point fixe.

Dans le plan R de $|C_4|$, les droites H issues du point M correspondent précisément aux coniques h de la surface F. Par ce qui précède, le domaine du premier ordre de M doit être l'image d'une courbe effective de F (et non d'un point), ce qui exclut le cas $n = 5$, le cas $n = 4$ lorsque les 11 points P se répartissent sur deux branches issues de M, et aussi le cas $n = 3$ si 3 de ces 11 points sont proches de M. Il nous reste ainsi pour $|C_4|$ deux types : *a*. $C^5(M^3, 11P^1)$; *b*. $C^6(M^4, N^2, 11P^1)$ où N est infiniment voisin de M, les 11 points P se succédant sur *une* branche linéaire issue de M; d'ailleurs $|N|$, quand le type C^6 est d'ordre minimum, cette branche est inflexionnelle.

S'il existe sur F une sextique K de genre 4, la quadrique Q menée par K découpe ultérieurement sur F une biquadratique δ. Q n'est pas un cône de sommet situé sur d, car ce sommet serait au moins double pour K. Q ne passe pas non plus par d, sinon ce serait une quadrique non conique contenant une biquadratique δ qui comprend au moins trois fois une droite d. Il en résulte que Q rencontre d en deux points A_1, A_2, doubles pour la biquadratique δ. Cette dernière se compose en réalité de deux coniques h_1, h_2 qui rencontrent d aux mêmes points A_1, A_2. Il n'est pas exclu que h_1 et h_2 se confondent, mais alors A_1, A_2 sont des points-pince de F, puisque, en chacun de ces points, la sextique K possède une seule tangente (1).

D'après cela, nous allons montrer qu'il faut rejeter le cas où l'adjoint $|C_1|$ serait du type $C^6(M^4, N^2, 11P_i')$ décrit ci-dessus. Tout d'abord, les courbes C_1 qui contiennent la tangente simple fixe, inflexionnelle, H_0, sont complétées par les courbes $C^5(M^3, N^2, 9P_i')$ d'un réseau; mais le système ∞^3 des quintiques $C^5(M^3, N^2, 8P_i')$ est composé au moyen d'une involution du second ordre, dont les couples sont formés de points alignés sur M; de sorte que le réseau considéré possède un point-base accidentel T, infiniment voisin de P_9 mais distinct de P_{10}. Il a le degré 2 et le genre 2; en conséquence, la droite fondamentale H_0 correspond à un point triple O de la surface F, situé sur la droite triple d, tel que tout plan mené par O découpe sur F une quintique douée d'un point triple O et d'un point double infiniment voisin. On en déduit que F possède en O un plan tangent ω_0 qui compte pour deux au moins et découpe sur F, en dehors de d, deux droites issues de O; de plus, dans la correspondance projective liant les plans ω menés par d aux droites H issues du point M, le plan ω_0 a pour homologue la droite H_0, puisque la conique h associée est dégénérée.

D'autre part, le simple jeu du principe de déchargement et des relations de voisinage, compte tenu de la surabondance du réseau $|C_1 - H_0|$, montre que les courbes C_1 assujetties à contenir le domaine du point M ou du point P_{11} comprennent la droite H_0 comptée cinq fois et sont complétées par les droites du faisceau $|H|$. Ainsi, l'image de la droite triple d de F se compose de la droite H_0 comptée cinq fois, du domaine de M compté deux fois et du domaine de P_{11}. En d'autres termes, les courbes C_1 touchant en M une droite H quelconque ont encore en commun un point dans le domaine du second ordre de M et un point dans le domaine de P_{11}. Les points du terne neutre considéré appartiennent à trois droites du faisceau $|H|$, dont deux coïncident avec la direction H donnée, la troisième étant H_0. Par suite, en un point quelconque de la droite d, la surface F touche le plan ω_0 et possède deux plans tangents variables confondus. En outre, les coniques h touchent la droite d (en un point variable).

En prenant pour d l'axe $x_1 = x_2 = 0$ d'un système de coordonnées projec-

(1) Toutefois, quand A_2 est infiniment voisin de A_1, il n'est pas certain que le plan des coniques $h_1 = h_2$ soit un plan tangent double de la surface F.

tives, $x_1 = 0$ représentant le plan ω_0, l'équation de F sera de la forme

$$x_1[x_3^2 f_2 + x_4^2 g_2 + x_3 x_4 h_2] + x_3 f_4 + x_4 g_4 + h_5 = 0,$$

où f, g, h désignent des formes en x_1, x_2 dont le degré est indiqué par l'indice. Le plan ω d'équation $x_4 = kx_2$ découpe sur F une conique h, rencontrant d en deux points dont les coordonnées vérifient la relation

$$k[x_3^2 f_2(k, 1) + x_4^2 g_2(k, 1) + x_3 x_4 h_2(k, 1)] = 0;$$

pour notre objet, cette équation doit admettre une racine double quel que soit le paramètre k, d'où

$$h_2^2 \equiv 4 f_2 g_2. \tag{1}$$

Qbservons qu'au point O, par exemple de coordonnées (0, 0, 0, 1), les trois plans tangents à la surface coïncident avec $\omega_0(x_1 = 0)$. Par suite, g_2 est identique à x_1^2, puis, par (1), $h_2 \equiv 2x_1 h_1$, $f_2 \equiv h_1^2$. L'équation de F s'écrit alors

$$x_1[x_3^2 h_1^2 + x_1^2 x_4^2 + 2x_1 x_3 x_4 h_1] + x_3 f_4 + x_4 g_4 + h_5 = 0,$$

tandis que la relation entre un plan tangent $x_4 = kx_2$ et son point de contact $(0, 0, y_3, y_4)$ devient

$$k[y_3^2 h_1^2(k, 1) + y_4^2 k^2 + 2k y_3 y_4 h_1(k, 1)] = 0$$

ou encore

$$k[y_3 h_1(k, 1) + k y_4]^2 = 0.$$

ce qui prouve *a posteriori* que F possède bien le long de d un plan tangent fixe et un plan tangent double variable. D'ailleurs, l'équation obtenue pour F représente visiblement une surface irréductible.

Mais nous n'avons pas tenu compte de toutes les propriétés de F qu'on peut déduire de la représentation plane; ainsi, le plan ω_0 recoupe F suivant deux droites issues de O (dont l'une coïncide avec d), et $g_4 \equiv x_1 g_3$. Néanmoins, quelles que soient les particularités que possède encore la surface F, celle-ci reste irréductible dès que le système $|C_4|$ du type examiné existe irréductible et simple, de genre et de degré effectifs 3 et 5. De toute façon, nous prouvons la thèse en montrant qu'une surface F irréductible ne possède pas de sextique projectivement canonique K.

La quadrique Q menée par K ne passe pas par d et recoupe F suivant deux coniques h_1, h_2 touchant d au même point A, nécessairement confondues dans un plan ω distinct de ω_0, tangent cuspidal en A à la surface F. L'absurdité réside dans le fait qu'une quadrique irréductible Q ne peut toucher F le long d'une conique h, nécessairement irréductible. En effet, le contour apparent de la surface F vue du pôle de ω par rapport à la quadrique Q (1) — ce pôle P n'est

(1) Ou du sommet P de Q si cette quadrique est un cône.

pas situé dans le plan ω — contiendrait la conique h; dans le plan R de $|C_1|$, la jacobienne d'un certain réseau extrait de $|C_1|$ contiendrait l'image H de la conique h, alors que les courbes du réseau considéré doivent effectivement découper sur la droite H une série g_2^2, ce qui est absurde. On peut encore montrer analytiquement l'absurdité en traduisant que la polaire de P par rapport à F découpe sur le plan ω, en dehors de d, la conique h; à cet effet, on pourra poser A(0, 0, 1, 0), $\omega(x_2 = 0)$, donc $h_1 \equiv a x_2$; dans $x_2 = 0$, l'équation de h ne renferme pas de rectangle $x_3 x_4$, d'où la relation $2ay_2 = 0$; mais la coordonnée y_2 de P n'est pas nulle, de sorte que $h_1 \equiv 0$ et F passerait 4 fois par A, ce qui est exclu.

9. La conclusion de toute cette analyse est que seul $C^5(M^3, 11N^1)$ peut servir d'adjoint $|C_1|$ à un système $|C|$ de genre 4. Puisque les sextiques K de F homologues des courbes C sont découpées par des quadriques qui contiennent deux coniques h_1, h_2 dont les plans passent par la droite triple d, $|C|$ est contenu dans $|2C_1 - 2H| = C^8(M^4, 11N^2)$, où H désigne les rayons du faisceau de sommet M dans le plan R de $|C_1|$. Ce système a la dimension virtuelle 1 et le genre virtuel 4. Nous allons voir que ce sont aussi ses caractères effectifs dans le cas générique, en même temps que nous prouverons son irréductibilité.

Les 12 points-base de $|C_1|$ étant fixés au hasard, il est clair que l'image de la droite triple d sera la quartique $C^4(M^2, 11N^1)$, irréductible et de genre effectif 2. Les courbes C_1 découpent sur cette quartique les ternes d'une g_3^1, tandis que les droites H marquent sur la même courbe les couples d'une g_2^1. D'après une formule classique de Schubert, la transformée $\overline{g}_3^1$ de g_3^1 dans l'involution g_2^1 possède deux couples communs avec g_3^1, qui se correspondent évidemment dans la g_2^1. Les droites H_1, H_2 issues de M qui joignent les points de ces couples représentent deux coniques h_1, h_2 rencontrant d aux mêmes points A_1, A_2, et réciproquement. Un tel couple de coniques est donc unique.

Les quadriques Q menées par les coniques du couple considéré découpent sur F un faisceau irréductible de sextiques K, qui n'a d'autres points-base que les deux points d'appui de h_1 et h_2 sur d et deux points infiniment voisins des précédents, situés sur l'intersection des plans tangents aux quadriques Q en A_1, A_2 avec les troisièmes plans tangents à F en ces points. Les courbes K, dépourvues de singularités ponctuelles, ont bien le genre 4. Il leur correspond, dans le plan R, les courbes $C^8(M^4, 11N^2)$ d'un faisceau, lui-même irréductible, puisqu'il contient l'image, comptée deux fois, de la droite triple d.

Le faisceau obtenu possède 4 points-base simples accidentels. Leur position est définie de la manière suivante : d'après ce que nous avons vu, il existe deux ternes de g_3^1 tels que deux points X_1, Y_1 du premier aient pour conjugués dans g_2^1 deux points X_2, Y_2 du second; les troisièmes points Z_1, Z_2 de ces groupes et les points infiniment voisins de Z_1, Z_2 situés sur les droites joignant ces points au point M sont les points-base accidentels du système $|C|$.

Si l'adjoint $|C_4|$ *d'un système irréductible* $|C|$ *de genre* 4 *est simple et formé de courbes hyperelliptiques de genre effectif* 3, *donc de degré effectif* 5, *il est réductible à un système* $C^4(M^3, 11N^1)$. *Quand les points-base de* C^5 *sont fixés au hasard,* $|C|$ *est le faisceau* $C^8(M^4, 11N^2, 2Z^1, 2U^1)$, *où* Z_1 *et* Z_2 *sont les* 2 *points de la quartique* $C^3(M^2, 11N^1)$, *irréductible et de genre* 2, *tels que les quintiques* C_4 *assujetties à contenir* Z_1 *ou* Z_2 *recoupent* C^4 *suivant* 2 *couples de points alignés sur* M, *et où* U_i *est infiniment voisin de* Z_i *sur la droite* MZ_i.

10. On peut se préoccuper de savoir si un choix particulier des 11 points-base de $|C_4|$ est capable d'amener une perturbation dans les caractéristiques du système $|C|$. Celui-ci peut évidemment cesser d'exister au titre de système d'adjoint $|C_4|$; il suffit, par exemple, que 3 des points N_i soient *proches* de M pour que ce dernier point devienne automatiquement quintuple pour $C^8(M^4, 11N_i^2)$, de telle sorte que l'adjoint de $|C|$ n'est plus $C^5(M^3, 11N^1)$; parmi les autres cas d'exception, les plus apparents sont ceux où $5N_i$ se trouvent sur une droite, ou bien plus de $8N_i$ sur une conique, ou encore M et $7N_i$ sur une conique. Le problème le plus important est toutefois d'étudier s'il est possible de trouver un système $|C| = C^8(M^4, 11N^2)$ de dimension supérieure à 1. Si celui-ci admet $C^5(M^3, 11N^1)$ pour adjoint, les multiplicités de C aux points-base de $|C_4|$ sont nécessairement celles que nous renseignions, même en tenant compte du principe de déchargement; donc, son degré effectif est au plus 4 et, comme les courbes C ne peuvent être hyperelliptiques, sa dimension est au plus 2. Il suffit par suite d'examiner si $|C|$ peut devenir un réseau (de degré 4 ou 3).

Ce cas se présente chaque fois que, sur la surface F, il existe une infinité de couples de coniques h_1, h_2 qui rencontrent la droite triple d suivant un même couple de points, nécessairement variables avec ces coniques, puisque F est dépourvue de point quadruple; d'ailleurs, l'une de ces coniques ne peut être fixe, sinon elle contiendrait d, ce qui n'est pas admis pour tous les couples h_1, h_2. Nous devons d'emblée exclure les surfaces F qui possèdent un plan tangent fixe double ou triple, ou encore deux plans tangents simples fixes le long de d; pour des raisons qui apparaîtront bientôt, nous supposerons que la surface F ne possède pas, le long de d, un plan tangent multiple variable.

En prenant pour d l'axe $x_1 = x_2 = 0$ d'un système de coordonnées projectives, et en supposant que deux plans tangents variables soient les mêmes en O_3 qu'en O_4, par exemple $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, F admet la représentation provisoire

$$x_1 x_2 (x_3^2 a_1 + x_4^2 b_1) + x_3 x_4 a_2 + x_3 a_3 + x_4 b_3 + a_4 = 0,$$

où a_i, b_i désignent des formes de degré i en x_1, x_2. Les plans tangents $x_1 = u x_2$ en un point $x_3 = v x_4$ de d répondent à la condition

$$u[v^2 a_1(u, 1) + b_1(u, 1)] + v a_3(u, 1) = 0.$$

Chaque plan est tangent en deux points de paramètres v_1, v_2 tels que

$$v_1 v_2 = \frac{b_1(u, 1)}{a_1(u, 1)}, \qquad v_1 + v_2 = -\frac{a_3(u, 1)}{u a_1(u, 1)}.$$

Pour qu'en ces points existent au moins deux plans tangents communs, il faut que la première des relations précédentes soit vérifiée par deux valeurs de u, donc que $b_1(x_1, x_2) \equiv a_0 a_4(x_1, x_2)$ et que v_1, v_2 soient conjugués dans l'involution $v_1 v_2 = a_0$. La relation qui donne $v_1 + v_2$ exprime alors qu'aux deux points correspondants sur d les trois plans tangents sont les mêmes (en particulier, en O_3 et O_4). La surface d'équation

$$x_1 x_2 a_1(x_3^2 + a_0 x_4^2) + x_3 x_4 a_3 + x_3 a_4 + x_4 b_4 + a_5 = 0$$

satisfait aux conditions prescrites, ne contient généralement aucune singularité ponctuelle en dehors de la droite triple d; comme elle ne possède pas de plan tangent multiple variable le long de cette droite, elle conduit certainement à un système représentatif (*cf.* le n° 8) $|C_4| = C^5(M^3, 11N^4)$, donc à un réseau surabondant $C^8(M^4, 11N^2)$ de degré 4. Notons que, si a_3 contient le facteur a_1, un plan tangent est fixe le long de d.

11. Après avoir établi l'existence de réseaux surabondants $C^8(M^4, 11N^2)$, il s'agit de trouver les configurations possibles de leurs points-base. Une étude poussée conduirait à des développements hors de proportion avec la place qu'occupent ces réseaux dans le plan général de notre travail. Nous nous bornerons donc ici, par un raisonnement rapide, à obtenir les types généraux de solutions, en nous réservant d'y revenir avec plus de détails dans une publication séparée. Les configurations trouvées sont en effet assez remarquables pour mériter d'être examinées de plus près.

L'image $C^4(M^2, 11N^4)$ de la droite triple d de F doit présenter des particularités qui traduisent la répartition des plans tangents. Nous admettrons dans nos raisonnements que cette image C^4 reste irréductible et de genre 2. Elle possède une involution g_2^1 découpée par les droites H issues de M et une série linéaire g_3^1 découpée par $C^5(M^3, 11N^4)$ lui-même. Cette dernière est dépourvue de point multiple variable et de point fixe, de sorte que les points de son terne générique appartiennent à 3 droites H distinctes; l'image projective F de $|C_4|$ est donc dépourvue de plan tangent multiple variable le long de d et F rentre dans le type considéré au numéro précédent. La répartition particulière des plans tangents à F le long de d équivaut à la permutabilité de g_2^1 avec g_3^1, ou encore à l'équivalence $2g_3^1 \equiv 3g_2^1$. Or, sur C^4, g_3^1 peut être découpée par un faisceau de coniques assujetties à passer en M et en trois points X_i convenables de C^4; l'un des X_i peut d'ailleurs être choisi arbitrairement, à moins que les ternes de g_3^1 ne soient formés de points collinéaires, auquel cas la g_3^1 est découpée sur C^4 par les droites issues d'un

certain point X de C^4. Il existe donc toujours une transformation quadratique, se réduisant éventuellement à l'identité, qui fait passer de C^4 à une quartique $\overline{C}^4$, dotée d'un point double $\overline{M}$, sur laquelle la transformée de g_3^1 soit découpée par un faisceau de rayons dont le sommet $\overline{X}$ appartient à $\overline{C}^4$. L'équivalence écrite ci-dessus peut alors se traduire géométriquement de façon très simple à l'aide des intersections $\overline{P}$, $\overline{Q}$ de $\overline{C}^4$ avec les tangentes en $\overline{M}$: *il faut et il suffit que la tangente à* $\overline{C}^4$ *en* $\overline{X}$ *contienne* $\overline{P}$ *et* $\overline{Q}$. En effet, si $\overline{Y}$ désigne l'intersection ultérieure de $\overline{MX}$ avec $\overline{C}^4$, $(\overline{X}, \overline{P}, \overline{Q})$ et $(\overline{M}, \overline{M}, \overline{Y})$ sont deux groupes de l'involution d'ordre 3, $(\overline{M}, \overline{P})$, $(\overline{M}, \overline{Q})$, $(\overline{X}, \overline{Y})$ trois couples de celle d'ordre 2. Pour plus de brièveté, nous dirons que $\overline{C}^4$ présente la disposition I en $\overline{M}$, $\overline{X}$. Pour obtenir celle-ci, il a fallu, en général, appliquer à C^4 une transformation quadratique, qui peut avoir aussi pour effet d'élever l'ordre du système $|C_4|$, de sorte que nous ne pouvons pas toujours remplacer C^4 par $\overline{C}^4$ si nous désirons conserver des systèmes d'ordre minimum. C^4 ne présente généralement pas la disposition I, mais une disposition un peu plus compliquée : elle doit posséder un point double M, un point simple X et quatre points alignés X_2, X_3, Y, Z tels que la conique menée par M, X, X_2, X_3 et tangente à C^4 en X coupe ultérieurement cette quartique en deux points situés respectivement sur MY, MZ. C'est ce que nous appellerons la disposition II relative à M, X, X_2, X_3. Notons que les rôles de X, X_2 et X_3 sont permutables.

Cela étant, supposons qu'il existe un système $C^5(M^3, 11N^1)$ avec une courbe $C^4(M^2, 11N^1)$ qui présente la disposition II par rapport à M et trois de ses points X_i. Nous pouvons choisir l'un de ceux-ci parmi les $11N_i$. Généralement, aucun des deux autres ne coïncide avec un point N_i et il n'est pas possible de se ramener à la disposition I. Mais, si deux des X_i peuvent coïncider avec N_{10}, N_{11}, une transformation quadratique de points fondamentaux M, N_{10}, N_{11} ramène le système à un autre du type $C^5(M^3, 11N^1)$, doué d'une courbe $C^4(M^2, 11N^1)$ présentant la disposition I par rapport à M et un de ses points X. Enfin, si les trois X_i peuvent coïncider avec N_9, N_{10}, N_{11}, une transformation quadratique de points fondamentaux M, N_9, N_{10} ramène à un système $C^5(M^3, 11N^1)$ avec courbe $C^4(M^2, 11N^1)$ présentant la disposition I par rapport à M, N_{11}. Nous voyons qu'il doit exister un type général dont peuvent se déduire deux types particuliers de structure plus simple, bien que du même ordre.

La position de tous les points-base n'est pas encore définie d'une façon assez précise pour qu'on puisse assurer l'existence d'un réseau $C^8(M^4, 11N^2)$ d'adjoint $C^5(M^3, 11N^1)$. Il faut par suite que nous étudiions encore dans quelles conditions le système $C^5(M^3, 11N^1)$ découpe précisément sur $C^4(M^2, 11N^1)$ l'involution g_3^1 permutable avec celle des couples de points alignés sur M.

Dans le cas général, la quartique C^4 présente la disposition II par rapport à M et trois de ses points dont un, P, appartient à la base de $|C_1|$ tandis que les deux autres, Q_1, Q_2, ne jouissent pas de cette propriété. La conique menée par M, Q_1, Q_2 et touchant C^4 en P recoupe C^4 en deux points A, B tels que les droites MA, MB rencontrent ultérieurement C^4 sur la droite Q_1Q_2. Les points A, B, P forment un terne de l'involution g_3^1, de sorte que, par le théorème du reste, les quintiques $(M^3, P^1, P^1, A^1, B^1)$ qui touchent C^4 en P découpent encore sur C^4 la série linéaire complète g_{10}^8 déterminée par le groupe $10N_i$ des points-base simples de $|C_1|$ distincts de P.

Dans les autres cas, on peut supposer que la quartique C^4 présente la disposition I par rapport à M et un de ses points P. La tangente en P à C^4 recoupe cette courbe en deux points A, B situés sur les tangentes en M à C^4; les points A, B, P forment un terne de la g_3^1 et les 11 points-base simples de $|C_1|$ déterminent la série linéaire complète g_{11}^9 découpée sur C^4 par les quintiques (M^3, A^1, B^1, P^1); en observant que le dernier point d'intersection de la droite PM avec C^4 forme, avec les points infiniment voisins de M sur C^4, un terne de la g_3^1, on peut substituer à ces quintiques les quintiques (M^1, Q_1). En particulier, si le point P est commun à toutes les courbes C_1, les 10 points-base simples ultérieurs de $|C_1|$ sont à l'intersection de C^4 et d'une quintique $(M^3, A^1, B^1, P^1, P^1)$ touchant C^4 en P, ou, comme on voit, d'une quartique (M^3) (augmentée de la droite ABP) (1). On observera que l'image projective F des systèmes particuliers $|C_1|$ que nous venons de construire possède soit une conique unisécante à la droite triple d, d'image $C^5(M^4, Q^1, 11N^1)$, soit une droite ne s'appuyant pas sur d, d'image $G^5(M^3, 10N^1)$.

Résumons-nous.

Pour certaines positions des points-base, le système $C^5(M^3, 11N^1)$ *est l'adjoint pur d'un réseau de degré* 4, $C^8(M^4, 11N^2)$, *d'ordre minimum et de surabondance* 1. *Lorsque la quartique* $C^4(M^2, 11N)$ *est irréductible et de genre* 2, *les* 10 *points* N_2, N_3, ..., N_{11} *constituent l'intersection de* $C^4(M^2, N_1^1)$ *avec une quintique* $C^5(M^3, A^1, B^1)$ *qui touche* C^4 *en* N_1, A *et* B *désignant deux points de* C^4 *tels que la conique menée par* M, A, B *et touchant* C^4 *en* N_1 *rencontre ultérieurement* C^4 *en deux points situés sur la droite qui joint les points d'intersection de* C^4 *et des droites* MA, MB. *Des dispositions particulières plus simples sont décrites ci-dessus* (*n°* 11).

12. Il reste, pour achever le programme tracé au n° 1, à découvrir les systèmes $|C|$ de genre 4 dont l'adjoint $|C_1|$ est simple, de genre 3 et de degré 4, de surabondance 1. L'image projective de $|C_1|$ est une surface rationnelle

(1) Ici, la construction directe de $|C_1| = C^5(M^3, 10N, P)$ est facile : il suffit de combiner les courbes formées de $C^4(M^2, 10N, P)$ et des rayons issus de M avec celles formées de $G^4(M^3, 10N)$ et des rayons issus de P. On voit avec évidence que $|C_1|$ découpe bien sur C^4 la même série que les droites issues de P.

quartique F plongée dans l'espace ordinaire et dépourvue de courbe multiple, c'est-à-dire [III, chap. VIII] douée d'un point triple, d'un tacnode ou d'un point double avec tacnode infiniment voisin. Ce dernier cas conduit à deux types, connus sous le nom de *surfaces* $F_4^{(2)}$ *et* $F_4^{(4)}$ *de Noether*. Excluons d'emblée les monoïdes, pour la même raison qu'au début du n° 8, et donnons quelques généralités valables pour les trois autres types de surfaces.

La quadrique Q menée par toute sextique K, projectivement canonique, tracée sur F rencontre ultérieurement la surface suivant une conique h (courbe *plane* du second ordre), réductible ou non. Pour notre objet, *le plan de h passe nécessairement par le point singulier* O *de* F, tacnode ou point double avec tacnode infiniment voisin. En effet, si h ne contient pas O, le système $|K|$ découpé sur F par les quadriques menées par h est effectivement dépourvu de points-base multiples et doit avoir pour adjoint le système des sections planes: or, par la loi distributive de l'adjonction, le système adjoint est découpé par les quadriques soumises à contenir h et le point double O; pour que ces quadriques se réduisent à l'ensemble des plans, il faut qu'il s'en détache un plan fixe où se trouvent à la fois h et O. On voit de plus que tout système d'adjoint $|C_1|$ est contenu dans un système de dimension 4, homologue de celui découpé sur F par les quadriques qui passent par la conique h attachée au système. Nous disons bien *la* conique, sinon F porterait un faisceau de droites ou de coniques situées dans des plans menés par O; ceci, on le sait, n'a pas lieu pour les trois types de surfaces considérés (1). Aussi nous bornerons-nous à la recherche des systèmes $|C|$ de dimension 4. Un tel système contient nécessairement son adjoint pur $|C_4|$ et a par suite le degré effectif 6 et la surabondance 1. Envisageons successivement les trois types de surfaces rationnelles quartiques avec point double.

Quand F possède un tacnode O, elle est l'image d'un système plan $|C_4| = C^6(7M^2, 4N^1)$ avec cubique fondamentale $G^3(7M^1, 4N^1)$. Cette cubique représente le domaine du point O, tandis que la section de F par le plan tacnodal est formée de quatre droites issues de O et correspond à la courbe C_1 comprenant la cubique G^3 comptée deux fois et le domaine des quatre points N_i. Si la conique h associée au système $|K|$ passe en O, le système $|C|$ homologue de $|K|$ dans le plan est contenu dans $|2C_4 - G^3| = C^9(7M^3, 4N^1)$. Comme il ne peut avoir l'ordre inférieur à 9, l'homologue de h dans le plan se réduit au domaine d'un point M, à celui de deux points N ou à deux fois celui d'un point N. Dans la première hypothèse, un point M *propre* deviendrait quadruple pour $|C|$ et devrait être au moins triple pour $|C_4|$; dans la deuxième, quand l'accident précédent n'a pas lieu, $|C_4|$ aurait la surabondance 2; dans la troisième, un point N serait triple pour $|C_4|$ et double pour $|C_4|$, à moins, encore une fois, qu'un point propre M ne devienne quadruple pour $|C|$.

(1) La surface F n'est pas réglée et ses sections planes ne sont pas hyperelliptiques.

Supposons donc que la conique h ne contienne pas O. Son plan U passe par O et coupe encore F suivant deux droites issues de O; il est distinct du plan tacnodal, de sorte que les deux droites considérées sont confondues. Il faut, par conséquent, que U touche F tout le long d'une des quatre droites de F contenues dans le plan tacnodal. Désignons par d cette droite, homologue du point-base N_4 de $|C_1|$, et observons que d est une composante *simple* de la section de F par le plan tacnodal, sans quoi F posséderait le long de d deux plans tangents distincts, le plan tacnodal et le plan U. Dans le plan, le faisceau de cubiques $C^3(7M^1, N_4^1)$ correspond aux cubiques découpées sur F par les plans menés par d; il contient une cubique $(7M^4, N_4^2)$, image de la section par U, et la cubique G^3, image de la section par le plan tacnodal, passant effectivement *une* fois par N_4; par suite, ses cubiques touchent G^3 en N_4. Les cubiques découpées sur F par les plans contenant d sont tangentes à d en O et recoupent donc d en un point fixe O′, infiniment voisin de O; les cubiques envisagées admettent en O une branche inflexionnelle tangente à d. En outre, *le point* N_4 *est uni pour l'involution de Geiser engendrée par le réseau* $C^3(7M^1)$. La conique h située dans le plan U a pour homologue la courbe particulière $H^3(7M^1, N_4^2)$. Retranchée de $|2C_1|$, celle-ci donne le système $|C| = C^9(7M^3, 3N^2)$, le seul de dimension 4 qui puisse admettre l'adjoint $|C_1|$, sauf permutation éventuelle des points N_i.

D'après la construction même, sur F, du système $|K|$ homologue du système trouvé $|C|$, celui-ci est irréductible, de dimension 4, de genre 4 et de degré 6, pour autant qu'il existe une surface F douée des caractères décrits plus haut. Or, l'équation

$$x_1^2 x_3^2 + x_4 x_3 (x_2 F_1 + x_3 f_1) + x_2 F_3 + x_3^2 f_2 = 0,$$

dans laquelle F_i et f_i désignent des formes d'ordre i en (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3) respectivement, représente une telle surface irréductible, avec tacnode O_4 et plan tacnodal $x_3 = 0$, tangente au plan $x_2 = 0$ tout le long de la droite $x_2 = x_3 = 0$, et rencontrée par ce plan suivant une conique qui ne passe pas au tacnode. La question de l'existence de $|C|$ se trouve ainsi élucidée.

Il peut paraître singulier que la condition d'existence de $|C|$ soit imposée à un point N_4 non contenu dans la base de $|C|$. Mais il faut remarquer que, jointe à l'hypothèse de l'existence du système surabondant $C^6(7M^2, 4N^4)$ de dimension 3, elle limite le choix des trois autres N_i. En effet, le choix de N_4 est possible de quatre manières si G^3 est elliptique (de deux seulement quand G^3 est rationnelle); le système $C^6(7M^2, N_4^1)$ découpe alors sur G^3 une série linéaire g_3^2, de sorte que deux seulement des points N_1, N_2, N_3 peuvent être pris arbitrairement. Il est d'ailleurs possible, sans sortir du plan, d'établir directement que N_4 est uni pour l'involution de Geiser définie par $C^3(7M^1)$. Si, en effet, nous donnons à G^3 la représentation paramétrique cartésienne $x = p(u)$, $y = p'(u)$, où $p(u)$ est la fonction elliptique élémentaire de

Weierstrass, et si m_i, n_j sont les valeurs de u aux points M_i, N_j, l'existence des systèmes $|C|$ et $|C_1|$ entraîne les relations

$$3\sum_1^7 m_i + 2\sum_1^3 n_j \equiv 0 \quad (\text{mod. périodes}), \qquad 2\sum_1^7 m_i + \sum_1^4 n_j \equiv 0 \quad (\text{mod. périodes}),$$

d'où il résulte que

$$\sum_1^7 m_i + 2n_i \equiv 0 \quad (\text{mod. périodes}),$$

comme nous l'avons annoncé.

Réciproquement, la condition imposée à N_i est suffisante pour qu'existe une cubique $H^3(7M^1, N_i^2)$, donc aussi, si H^3 est distincte de G^3, le système $C^9(7M^3, 3N^2) = |2C_1 - H|$.

Puisque deux points N_2, N_3 peuvent être choisis arbitrairement sur G^3, nous pouvons prendre l'un d'eux en un second point uni de l'involution de Geiser sur G^3 : $|C_1|$ est alors l'adjoint de deux systèmes de dimension 4 et de même type, déduits l'un de l'autre en permutant les rôles des deux points unis adoptés. Si G^3 est elliptique, nous pouvons même fixer les trois points N_2, N_3, N_4 en trois points unis; N_1 *est alors le quatrième point uni*, comme il résulte aisément de la représentation paramétrique déjà adoptée de G^3 ou de la représentation analytique de la surface F qui possède des plans tangents fixes le long de trois droites issues du tacnode. L'équation d'une telle surface est réductible à la forme

$$x_4^3 x_3^2 + x_4 x_3^2 F_1(x_1, x_2, x_3) + x_4 x_3 f_2(x_1, x_2) + x_3 F_3(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2) = 0,$$

où f_2 est assujetti à contenir en facteur trois facteurs linéaires de f_4; f_2 est identiquement nul et le plan tangent le long de la quatrième droite est fixe à son tour. On vérifie immédiatement l'existence de quatre systèmes irréductibles $C^9(7M^3, N_i^2, N_j^2, N_k^2)$ d'adjoint $|C_4|$.

Tout système linéaire $|C|$ *de genre* 4 *dont l'adjoint* $|C_4|$ *est simple, de genre* 3, *degré* 4, *et d'adjoint* $|C_2|$ *elliptique, est contenu dans un système* ∞^4 *de même genre, réductible à* $C^9(7M^3, 3N^2)$, *de degré effectif* 6. *Ce dernier a pour adjoint un système surabondant* $C^6(7M^2, 3N^1, P^1)$ *avec cubique fondamentale* $G^3(7M^1, 3N^1, P^1)$*; la condition nécessaire et suffisante d'existence de* $|C|$ *est que* P *soit uni pour l'involution de Geiser engendrée par le réseau* $C^3(7M^1)$ *et effectivement simple pour* G^3. *Suivant que parmi les points unis (simples pour* G^3*) de l'involution de Geiser figurent un, deux ou quatre points-base simples du système adjoint donné* $|C_4|$, *il existe une, deux ou quatre solutions* $|C|$ *du type décrit ci-dessus, auxquelles sont subordonnés tous les systèmes d'adjoint* $|C_4|$.

13. Le cas suivant est celui où $|C_4|$ est le système $C^7(M^3, 9N^2)$ avec cubique fondamentale $G^3(M^1, 9N^1)$, représentatif de la surface $F_4^{(2)}$ de Noether. Le

système $|C_4 - G^3| = |C_3| = C^4(M^2, 9N^4)$ est un réseau de genre 2 et de degré 2, doué d'un point-base accidentel P situé sur G^3, et correspond à la gerbe ayant pour centre le point double isolé O de F; le faisceau $|C_4 - 2G^3| = |C_3| = C^1(M^1)$ a pour homologue le faisceau des quartiques, irréductibles et rationnelles, découpées sur F par les plans contenant la droite d qui joint O à un point tacnodal O_1 de F, infiniment voisin de O. Rappelons encore que la section de F par le plan osculateur en O a pour image la droite MP et ne peut contenir une droite.

Tout système quadruplement infini d'adjoint $|C_4|$ est du type $|2C_4 - H|$, où H est l'homologue d'une conique h de la surface. Nous savons que le plan de h contient O. Si O n'appartient pas à h, l'intersection ultérieure de la surface avec le plan de h se compose de deux droites issues de O, appartenant nécessairement au plan osculateur en O, ce qui est absurde. L'hypothèse que h passe en O n'offre non plus aucune issue; en effet, $|C|$ est alors du type $|2C_4 - G^3 - H|$, d'ordre 11 ou 10, H est le domaine d'un point N ou une droite issue de M, le plan de h contient d et h doit passer en O_1; cette conclusion est absurde, car elle signifie que $|C|$ est contenu dans le système $|2C_4 - 2G^3|$, d'ordre 8.

Il n'existe donc aucun système irréductible d'adjoint $|C_4|$.

14. Enfin se présente le système $|C_4| = C^9(8M^3, N^2, P^1)$ avec cubique fondamentale $G^3(8M^1, N^1, P^1)$, représentatif de la surface $F_4^{(3)}$ de Noether. Celle-ci possède encore un point double O avec tacnode O_1 infiniment voisin, mais passe maintenant par la droite d qui joint ces deux points, en y admettant un plan tangent fixe U, précisément le plan osculateur en O. La section de la surface par U comprend deux fois la droite d, image de P, et la conique k, image de N, tangente à d en O. Nous devons de nouveau étudier la position d'une conique h, tracée sur F dans un plan mené par O, et dont l'homologue H donne pour reste par rapport à $|2C_4|$ un système d'adjoint $|C_4|$.

Si nous supposons que h ne passe pas en O, son plan rencontre ultérieurement F suivant deux droites issues de O. Puisque d est l'unique droite de F qui passe en O, le plan de h n'est autre que U, h est la conique k et passe en O, contrairement à notre hypothèse.

Puisque h passe forcément par O, son image H est d'ordre o. En effet, si H était d'ordre positif n, les 10 points-base de $|C_4|$ absorberaient au plus $3n - 1$ intersections de H avec G^3, donc au plus $3(3n - 1)$ intersections de H avec C_4, et ce maximum est toujours inférieur au nombre $9n - 2$ qui serait requis pour que H corresponde bien à une conique. Ainsi, h se réduit à k ou à deux fois d. On en déduit que tout système $|C|$ d'adjoint $|C_4|$ et de dimension 4 est du type $C^{12}(8M^4, N^3)$ ou $C^{12}(8M^4, N^2, P^2)$. Le second système est à rejeter, car il devrait posséder un nouveau point double pour être de genre 4 et son degré

s'abaisserait à 4. En revanche, le premier système a le genre virtuel 4; il resterait à prouver qu'il est irréductible et dépourvu de points-base multiples accidentels, de manière qu'il admette bien l'adjoint $|C_4|$. Il possède de toute façon un point-base simple accidentel P_4 simple pour G^3, vu qu'il doit suffire d'une condition pour qu'il admette G^3 comme composante fixe et se réduise à $|C_4|$.

L'existence du système irréductible $C^{12}(8M^4, N^3, P_4^1)$ de genre 4 peut s'étudier sur la surface F, mais les singularités infiniment voisines créent des difficultés qui se résolvent le mieux à l'aide de la représentation plane. Aussi préférons-nous ne plus quitter le plan. Le système à l'étude rentre dans une suite infinie de systèmes $C^{3n}(8M^n, N^{n-1}, P_n^1)$, de dimension n, genre n, surabondance $1 (n = 1, 2, 3, \ldots)$, doués d'une cubique fondamentale $G^3(8M^1, N^1, P_n^1)$. Ces systèmes, pour la première fois rencontrés par Jung [V], sont intervenus plus tard dans diverses études, mais nous n'avons pas connaissance qu'on ait démontré leur irréductibilité ni l'absence de points-base extérieurs à G^3. Une telle démonstration n'est pas difficile à donner pour toute valeur positive de n, bien qu'il eût été suffisant ici de l'exposer pour $n = 4$.

Pour les premières valeurs de n, nous obtenons des systèmes connus, le faisceau de cubiques elliptiques, le réseau $C^6(8M^2, N^1, P_2^1)$, puis le système $C^9(8M^3, N^2, P_3^1)$ représentatif de la surface $F_4^{(3)}$ de Noether. Procédons par récurrence, et admettons l'existence du système irréductible

$$C^{3n-1}(8M^{n-1}, N^{n-2}, P_{n-1}^1),$$

de dimension et genre effectifs $n-1$, de degré effectif $2n-4$ et de surabondance 1 par rapport à sa base *totale*. Le système

$$|C^{3n}(8M^n, N^{n-1})| = |C^{3n-1}(8M^{n-1}, N^{n-2}) + G^3(8M^1, N^1)|$$

est de dimension virtuelle n, de sorte qu'il n'admet pas G^3 comme composante fixe et est irréductible. Comme sa dimension virtuelle est égale à son genre virtuel, le système est régulier *par rapport à sa base imposée* et a exactement la dimension n. Il s'ensuit qu'il possède un point-base accidentel P_n sur G^3, puisque, en lui retranchant G^3, nous devons retrouver un système de dimension $n-1$. En revanche, il ne possède aucun point-base X extérieur à G^3, sinon X serait un point-base de $|C^{3(n-1)}| = |C^{3n} - G^3|$, puis de $|C^{3(n-2)}|$, ..., et, finalement, de $|C^3(8M^1, N^0, P_1^1)|$.

$C^{3n}(8M^n, N^{n-1}, P_n^1)$ admet pour adjoints purs successifs tous les systèmes antérieurs de la suite. Il en résulte encore qu'il est d'ordre minimum et que P_n ne coïncide jamais avec P_{n-1}, sinon la série canonique sur une courbe C^{3n} admettrait un point fixe. Observons enfin que la démonstration précédente repose sur les seules hypothèses : il existe une cubique, éventuellement

dégénérée, passant *simplement* par les points donnés 8M, N (¹); ensuite, les cubiques menées par les huit premiers de ces points sont irréductibles et elliptiques. D'ailleurs, cette dernière condition est aussi nécessaire.

Appliqués au cas $n=4$, les résultats précédents mettent hors de doute l'existence de la solution $C^{12}(8M^4, N^3, P_4^1)$.

Les systèmes d'ordre minimum dont l'adjoint $|C_1|$ *est* ∞^3, *simple, de genre* 3 *et degré* 4, *sont contenus dans un système* $|C|$ *de genre* 4, *dimension* 4 *et degré* 6, *réductible à l'un des systèmes décrits au n°* 12 *ou au système* $C^{12}(8M^4, N^3, P_4^1)$ *doué d'un point-base accidentel* P_4 *sur* $G^3(8M^4, N^4)$.

Voici achevée la détermination des systèmes irréductibles de genre 4 dont le système adjoint est simple et de genre inférieur à 4. Il importe d'observer que, pour la première fois dans la littérature des systèmes linéaires de courbes planes, *cette détermination atteint même les courbes isolées*. Dans les autres parties de ce travail, il ne nous sera plus possible de conduire l'étude aussi loin : nous devrons nous limiter aux systèmes de dimension non nulle, et, lorsque l'adjoint a le genre au moins égal à 4, aux systèmes de dimension supérieure à deux.

CHAPITRE II.

SYSTÈMES ADJOINTS NON SIMPLES ET DE GENRE INFÉRIEUR A QUATRE.

15. *Systèmes adjoints composés au moyen d'une involution.* — Nous abordons l'étude des systèmes irréductibles *infinis* $|C|$ de genre 4 dont l'adjoint pur $|C_1|$, toujours de genre effectif inférieur à 4, n'est plus simple, soit qu'il appartienne à une involution, soit qu'il soit composé au moyen d'un faisceau. Débutons par le cas où $|C_1|$ est irréductible et composé au moyen d'une involution J. Celle-ci est nécessairement du second ordre et induit sur chaque courbe C_1 une série linéaire [N, n° 31]. Les courbes C_1 sont hyperelliptiques, de genre 2 ou 3, et forment un système de degré 4 (*ibid.*).

Examinons séparément les deux valeurs du genre.

Si le système $|C_1|$, de dimension 3 et degré 4, est de genre 2, partant régulier, il admet un faisceau $|E|$ de bisécantes rationnelles ou elliptiques appartenant à J [N, n° 22]. Distinguons de nouveaux deux cas.

16. Lorsque les bisécantes E sont elliptiques, $|C_1|$ appartient à priori à quatre types connus, décrits dans le mémoire [N], au n° 17.

(¹) En fait, à quelques modifications de langage près, la démonstration tient encore quand la cubique G^3 acquiert accidentellement un point multiple en l'un ou l'autre des points 8M, N; cette cubique reste fondamentale pour le système $|C^{3n}|$ considéré, mais ne passe plus nécessairement au point-base simple accidentel P_n de ce système.

Puisqu'il est régulier, il ne peut se rattacher au premier type, relatif à des systèmes surabondants. $|C_1|$ ne peut être dérivé d'un des autres types par adjonction de points-base sans devenir surabondant, vu que les systèmes décrits à l'endroit cité ne sont pas simples. Dès lors, si l'on tient compte de la valeur 2 du genre, deux systèmes seulement sont à retenir :

a. $C^4(M^2, 8N^1)$ avec faisceau elliptique $E^3(M^1, 8N^1)$; *b*. $C^6(8M^2)$.

a. Si $|C_1| = C^4(M^2, 8N^1) = |D+E|$, où $|D|$ désigne le faisceau de rayons de sommet M, les droites D rencontrent les courbes C en quatre points variables au moins, sinon, suivant que le nombre des intersections vaudrait 0, 1, 2, 3, les courbes C seraient réductibles ou rationnelles, ou bien les adjointes C_1 deviendraient elles-mêmes réductibles ou unicursales. Comme, d'autre part, les courbes C rencontrent leurs adjointes C_1 en 6 points variables, sans pouvoir rencontrer une seule fois les courbes E, elles sont nécessairement quadrisécantes des droites D et bisécantes des cubiques E; elles sont hyperelliptiques et appartiennent à la même involution J que $|C_1|$, à savoir celle des intersections libres des courbes D et E. Sur la quadrique double image projective de $|C_1|$ existent deux systèmes de génératrices rectilignes *d*, *e*, homologues des faisceaux $|D|$, $|E|$. Aux courbes C correspondent des cubiques gauches bisécantes de *d*, unisécantes de *e*; $|C|$ est donc contenu dans le système $|2E+D| = C^7(M^3, 8N^2)$, qui [N, n° 17] est irréductible et régulier, de genre 4, degré 8 et dimension 5; il appartient effectivement à J et est d'ordre minimum.

b. Si $|C_1|$ est le système générateur $C^6(8M^2)$ d'une involution de Bertini J, les couples de cubiques $E^3(8M^1)$ forment des courbes C_1 particulières qui passent doublement au neuvième point-base N du faisceau $|E|$. Par suite, des courbes C d'adjoint $|C_1|$ sont bisécantes ou trisécantes des courbes E suivant qu'elles passent ou non en N; dans le premier cas seulement, elles appartiennent à J. D'ailleurs, pourvu qu'elles soient irréductibles, elles passent au plus simplement en N.

L'image projective de $|C_1| = |2E^3(8M^1)|$ est un cône quadratique Q dont les génératrices *e* correspondent à E. Quand les courbes C sont trisécantes des cubiques E, il leur correspond sur Q des sextiques canoniques, dont chacune est découpée sur Q par une surface cubique. Ainsi, l'ensemble d'une courbe C et de sa conjuguée $\overline{C}$ dans J est contenu dans $|3C_1| = C^{18}(8M^6)$. C et $\overline{C}$ ont même système adjoint $|C_1|$ d'ordre 6, elles ont toutes deux au moins l'ordre 9, et par suite exactement cet ordre. Chacune de ces courbes passe au plus trois fois en chaque point M_i, propre ou non, pour que $|C_1|$ y passe deux fois seulement; donc, C passe exactement trois fois en chaque M_i et appartient au système irréductible $C^9(8M^3) = |C_1 + E^3(8M^1)|$. La dimension virtuelle 6 de celui-ci est trop forte pour qu'il puisse être surabondant ou composé au moyen d'une

involution, donc il n'admet pas N comme point-base accidentel, ni évidemment aucun autre point, et possède la dimension 6, le genre 4 et le degré 9. C'est une solution du problème; son ordre est minimum.

Comme nous l'avons vu, une autre solution peut être cherchée en admettant que les courbes C soient bisécantes des cubiques E. Il leur correspond sur Q des cubiques gauches qui passent simplement au sommet de Q, et qui appartiennent de ce chef au système $|c_1 + e|$, en désignant par c_1 les sections planes de Q. A son tour, $|C|$ est contenu dans le système irréductible

$$|C_1 + E^3(8M^1, N^1)| = C^9(8M^3, N^1).$$

Celui-ci est simplement subordonné à $C^9(8M^3)$. Observons qu'il ne possède sûrement aucun point-base accidentel et n'est pas surabondant. Il se rattache d'ailleurs, tout comme son adjoint, au type 4 de [N], n° 17.

17. Supposons ensuite que le système $|C_1|$, de genre 2 et composé au moyen d'une involution J du second ordre, admette un faisceau de bisécantes rationnelles E. La différence $|C_1 - E|$ est un faisceau $|H|$ formé de bisécantes des courbes E et C_1. Ce faisceau est dépourvu de partie fixe, car sa partie variable, si elle ne coïncide pas avec $|E|$, donne par addition à $|E|$ un système irréductible de dimension au moins égale à 3, et qui coïncide par conséquent avec $|C_1|$. Quant à l'hypothèse où la partie variable de $|H|$ serait $|E|$, elle n'est pas à retenir ici, parce que le faisceau $|E|$ est crémoniennement réductible à un faisceau de droites, que les courbes E sont au moins quadrisécantes de C (*cf.* n° 16, *a*) et que, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, C rencontrerait au moins huit fois ses adjointes. Nous pouvons donc admettre que C est quadrisécante des E et bisécante des H. Or, la relation d'addition des genres, appliquée à E, H, fournit pour les courbes H le genre virtuel 1. Le genre effectif est 0 ou 1; la première valeur est à rejeter, sinon C posséderait de nouveau un faisceau de bisécantes rationnelles. Dès lors, $|C_1|$ admet un faisceau de bisécantes elliptiques H et ressortit à l'un des cas étudiés au n° 16, plus précisément au premier.

Les systèmes infinis de genre 4 et d'ordre minimum dont l'adjoint pur est de genre 2 et composé au moyen d'une involution sont $C^7(M^3, 8N^2)$ *avec faisceau elliptique* $E^3(M^1, 8N^1)$, $C^9(8M^3)$, *et les systèmes subordonnés.*

18. Après avoir admis que le système adjoint $|C_1|$, de degré 4 et composé au moyen d'une involution J du second ordre, avait le genre 2, envisageons l'éventualité où son genre vaut 3. Il possède de nouveau un faisceau $|E|$ de bisécantes rationnelles ou elliptiques [N, n° 23].

Si les courbes E sont elliptiques, $|C_1|$ appartient à l'un des quatre types décrits au n° 17 de [N]. En tenant compte du fait qu'il possède la surabondance

un et qu'il est donc nécessaire d'imposer deux points-base simples supplémentaires ou un point-base double pour les trois derniers types, on voit que $|C_4|$ se réduit en définitive à l'un des trois systèmes suivants :

a. $C^9(8M^3, N^2, P^1)$, avec faisceaux $E^3(8M^1, P^1)$ et $H^6(8M^2, N^2)$; J est l'involution de Bertini de points fondamentaux M_i.

b. $C^7(M^3, 8N^3, P^2)$ avec faisceau $E^3(M^1, 8N^1)$ et P uni pour l'involution J des intersections libres des cubiques E avec les droites D issues de M.

c. $C^6(7M^2, 2N^1, 2P^1)$ où 2N, 2P sont deux couples de l'involution de Geiser J engendrée par $C^3(7M^1)$.

Reprenons successivement ces trois cas.

a. Puisque $|C_4| = |H + E|$, les courbes C d'adjoint $|C_4|$ sont bisécantes des courbes d'un des faisceaux $|H|$, $|E|$ et quadrisécantes des courbes de l'autre, ou bien admettent les deux faisceaux de trisécantes $|H|$, $|E|$. La dernière hypothèse est à exclure, car il est bien clair qu'aucune courbe ne rencontre un nombre impair de fois les sextiques H d'un faisceau de Halphen. Il faut donc admettre que $|C|$ soit doué d'un faisceau de bisécantes elliptiques H ou E et, partant, composé au moyen de l'involution de Bertini J. Par suite, $|C|$ est réductible à l'un des types, disons primaires, décrits dans le Mémoire [N], n° 17, ou à un système *dérivé des précédents par l'adjonction de nouveaux points-base, simples ou doubles ;* cette locution doit être comprise au sens étroit : parmi les systèmes subordonnés aux types primaires, entrent seuls en ligne de compte ceux dont l'ordre et les multiplicités effectives aux points-base du faisceau des bisécantes elliptiques coïncident avec l'ordre et les multiplicités en ces points du système primaire dont ils dérivent; un tel système subordonné a même adjoint $|C^2|$ (1) que le système primaire associé et est aussi d'ordre minimum. Mais nous pouvons obtenir des renseignements précis au sujet de cet ordre minimum du système $|C|$; il suffit, en effet, de se référer à la quadrique double Q, image projective de $|C_4|$, pour vérifier que $|C|$ est contenu dans $|2H + E|$ ou $|2E + H|$ suivant que les sextiques H ou les cubiques E sont bisécantes de C.

Dans le premier cas, $|C|$ appartient au premier type de [N], n° 17, et est réductible à $C^{12}(8M^4, N^3, N_1^1)$ avec un point-base accidentel N_1 infiniment voisin de N sur $G^3(8M^1, P^1, N^1)$, ou à $C^{15}(8M^5, N^3, P^1, U^2)$, où U est un point uni de l'involution J. Le second système ne peut convenir s'il admet C_4 pour adjoint pur, puisque la cubique $G^3(8M^1, P^1, N^1, U^1)$ qui doit être défalquée de son adjoint impur serait, non une courbe fondamentale de C, mais bien une composante fixe de ce système. En revanche, le premier système trouvé admet bien l'adjoint $|C_4|$, est irréductible et d'ordre minimum (*loc. cit.*).

---

(1) *Cf.* [N], nos 3, 4.

Dans le second cas, $|C|$ est d'ordre minimum 12 et appartient au quatrième type de [N], n° 17; il est réductible à $C^{12}(8M^4, P^2, N^2, U^2)$, où U est un point uni de l'involution J tel que les courbes adjointes (impures) $C^9(8M^3, P^1, N^4, U^1)$ se réduisent aux courbes $C_1 = C^9(8M^3, P^1, N^2)$; U est donc le point infiniment voisin de N sur la courbe unie de l'involution J. On peut vérifier que le système $|C|$ obtenu est irréductible, triplement infini, de genre et de degré 4, en se référant à la quadrique double Q, image projective de $|C_1|$; sans entrer dans le détail, bornons-nous à observer que les courbes C ont pour homologues sur Q les cubiques gauches bisécantes aux génératrices rectilignes h qui correspondent aux sextiques H et assujetties à toucher la courbe de diramation au point u représentant U; ces cubiques gauches sont irréductibles, puisque la tangente en u à la courbe de diramation n'est pas une génératrice e.

Les systèmes d'ordre minimum (y compris les courbes isolées) dont l'adjoint est $C^9(8M^3, N^2, P^1)$ *avec faisceaux elliptiques* $E^3(8M^1, P^1)$ *et* $H^6(8M^2, N^2,)$ *sont:* 1° $C^{12}(8M^4, N^3, N_1^1)$, *de dimension* 4, *degré* 6 *et surabondance* 1, *doué d'un point-base simple* N_1 *infiniment voisin de* N *sur* $G^3(8M^1, N^1, P^1)$; 2° $C^{12}(8M^4, N^2, U^2, P^2)$, *de dimension* 3, *degré* 4 *et surabondance* 2, *doué d'un point-base double* U *infiniment voisin de* N *sur la courbe unie de l'involution de Bertini* J *de points fondamentaux* M_i; 3° *ou des systèmes subordonnés aux précédents. Tous ces systèmes appartiennent à l'involution* J.

Nous attirons l'attention sur le fait, rappelé dans l'Introduction, que $|C_1|$ *est ici l'adjoint de deux systèmes typiquement distincts, qui ne rentrent pas dans un système linéaire commun de même genre et ne sont pas crémoniennement réductibles l'un à l'autre :* ils sont de dimensions différentes et admettent deux faisceaux différents de bisécantes elliptiques.

19. Passons à l'examen du cas b. du numéro précédent, celui où

$$|C_1| = C^7(M^3, 8N^2, P^2),$$

en admettant l'existence d'un faisceau de cubiques elliptiques $E^3(M^1, 8N^1)$. Ce dernier est contenu dans $|C_1|$ et laisse pour reste un faisceau $H^4(M^2, 8N^1, P^2)$, irréductible d'après un raisonnement déjà fait au n° 17, chaque fois que sa partie variable ne coïncide pas avec $|E|$. Rappelons d'ailleurs que P est uni pour l'involution J des couples communs aux courbes E et aux droites issues de M. Un peu d'attention fait voir que les multiplicités assignées de M, N, P pour H^4 sont effectives.

Une courbe C d'adjoint $|C_1|$ est trisécante des courbes E, H, ou bien bisécante des E et quadrisécante des H, ou enfin quadrisécante des E et bisécante des H. Nous allons voir que la première hypothèse est à exclure.

Quand C est supposée trisécante des courbes E, H, elle ne peut appartenir à l'involution J. Le recours à la quadrique double Q image projective de $|C_1|$

montre, d'une manière analogue à celle du n° 16, *b*., que l'ensemble de C et de sa transformée $\bar{C}$ dans l'involution J appartient au système $|3C_1|$, d'ordre 21. En outre, C et $\bar{C}$, pour admettre l'adjoint $|C_1|$, ont au moins l'ordre 10. Il en résulte que l'une de ces courbes est d'ordre 10, et nous pouvons admettre que c'est C. En désignant par x, y_i, z les multiplicités effectives de C en M, N_i, P, nous avons

$$30 - x - \Sigma y_i = 40 - 2x - \Sigma y_i - 2z = 3, \qquad \text{d'où} \qquad x + 2z = 10,\ x + \Sigma y_i = 27.$$

x est pair et vaut au plus 4, tandis que z vaut au plus 3; par suite, $x = 4$, $z = 3$. On voit ensuite que tous les y_i valent 3, à l'exception d'un seul, $y_8 = 2$. Le système C cherché est, aux points-base simples près, du type $C^{10}(M^4, 7N^3, N_8^2, P^3, X^2)$, le point double X n'appartenant pas à la cubique fondamentale $G^3(M^4, 8N^1, P^1)$. Pour que l'adjoint soit bien $|C_1|$, il faut toutefois que X soit infiniment voisin de N_8 et que, au préalable, le système $C^7(M^3, 7N^2, N_8^1, P^2)$ possède déjà un point-base simple infiniment voisin de N_8 et distinct de X. Cette condition à priori est vérifiée; les courbes du système en question sont tangentes à G^3 en N_8, car ce système est nécessairement de dimension 4, laisse pour reste par rapport à G^3 un système de dimension 3, et enfin ne doit satisfaire qu'à une condition pour se réduire à $|C_1|$. Remarquons maintenant que le reste du système trouvé $|C^{10}|$ par rapport à G^3 est virtuellement $C^7(M^3, 7N^2, N_8^1, P^2, X^2)$ et devient en fait $C^7(M^3, 8N^2, P^2, X^1) = |C_1 - X|$. Ce reste est donc de dimension 2, car le passage en d'éventuels points-base simples accidentels de $|C^{10}|$ ne lui impose aucune condition. Il s'ensuit que $|C^{10}|$ doit être de dimension 3, alors que son degré vaut au maximum 4; il est formé de courbes hyperelliptiques et est composé au moyen de la même involution J que son adjoint $|C_1|$, contrairement à l'hypothèse (¹).

Nous passons au cas où la courbe C est bisécante des courbes E ou H; $|H|$ est alors distinct de $|E|$ et formé de quartiques irréductibles. C est hyperelliptique et appartient à l'involution J. Par l'intermédiaire de la quadrique double Q, on voit que C est contenue dans le système $|2E + H|$ ou $|2H + E|$; son ordre minimum vaut à priori 10 ou 11 et $|C|$ est par suite réductible à un système du second type décrit dans [N] au n° 17, plus précisément $C^{10}(M^4, 8N^3, P^2, P_1^2)$, où P_1 est situé sur la courbe unie de l'involution J[N, n° 18]. On pouvait d'ailleurs prévoir que C ne peut être d'ordre minimum 11, puisque la transformation quadratique, nécessairement existante, de points fondamentaux M, P, N_i, permute les faisceaux $|E|$ et $|H|$ sans altérer $|C_1|$. D'autre part, P_1 doit être infiniment voisin de P pour que ce dernier puisse devenir double pour l'adjoint par le jeu du déchargement. Le système $|C^{10}|$ ainsi obtenu est

(¹) Le raisonnement tient si la partie variable de $|H|$ est $|E|$: la condition arithmétique exprimant que les courbes C sont trisécantes des courbes H reste valable : elle exprime alors que les courbes C sont sextisécantes des courbes C_1.

représenté sur Q par l'ensemble des cubiques gauches bisécantes des génératrices h homologues de H, et qui touchent la courbe de diramation j au point d'appui de celle-ci sur la génératrice de Q homologue de P (en dehors d'un point triple de j homologue de G^3). Le système est donc irréductible et dépourvu de points-base accidentels. Il a le degré 4, la dimension 3, la surabondance 2.

Les systèmes dont l'adjoint est $C^7(M^3, 8N^2, P^2)$, *avec faisceau elliptique* $E^3(M^1, 8N^1)$ *et* P *uni pour l'involution* J *des couples de* E *alignés sur* M, *sont composés au moyen de* J *et réductibles à* $C^{10}(M^4, 8N^3, 2P^2)$, *doué d'un point double infiniment voisin de* P *sur la courbe unie de* J, *ou à des systèmes subordonnés au précédent (tous d'ordre minimum).*

20. Le troisième cas défini au n° 18, et qu'il faut maintenant traiter, est celui où l'adjoint de $|C|$ est $|C_1| = C^6(7M^2, 2N^1, 2P^1)$, supposé que 2N, 2P forment deux couples de l'involution de Geiser J engendrée par $C^3(7M^1)$. C_1 est la somme des faisceaux $E^3(7M^1, 2N^1)$ et $H^3(7M^1, 2P^1)$. Ceux-ci seraient éventuellement confondus si le couple 2P était infiniment voisin du couple 2N, mais alors C serait trisécante des cubiques E.

Or, montrons par un raisonnement rapide qu'on ne peut admettre l'hypothèse où la courbe C serait trisécante des courbes E et, partant, des courbes H, peut-être virtuelles. Dans cette éventualité, C n'appartient pas à l'involution J, et le recours à la quadrique double Q image de $|C_1|$ montre, de la même manière qu'au n° 16, que C est d'ordre 9 et passe trois fois en chaque point M_i. Si nous désignons par x_j sa multiplicité en N_j, par y_k sa multiplicité en P_k, le fait que C est trisécante des E et sextisécante des C_1 se traduit par les conditions

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 3.$$

Aucun des quatre x_j, y_k n'est égal à 3, d'après le comportement de l'adjoint, de sorte que C est contenue dans le système $C^9(7M^3, N_1^2, N_2^1, P_1^2, P_2^1)$. Ce dernier a le genre 5, il est nécessaire qu'il acquière un nouveau point-base double, mais alors le type de l'adjoint ne saurait plus être respecté.

Force nous est donc de supposer que C soit bisécante des courbes E, par exemple, et quadrisécante des cubiques H. Les faisceaux $|E|$, $|H|$ sont nécessairement distincts et les couples 2N, 2P ne sont pas infiniment voisins. La courbe C est hyperelliptique, appartient à l'involution J et, toujours par la considération de la quadrique double Q image de $|C_1|$, est contenue dans le système $2E + H = C^9(7M^3, 2N^2, 2P^1)$. Toutefois, pour que le genre se réduise à 4 en tenant compte du comportement de l'adjoint et du nombre d'intersections avec les courbes H, il faut que les multiplicités effectives aux points P_i soient 2, 0. C doit appartenir au système $C^9(7M^3, 2N^2, P_1^2)$, qui doit lui-même être contenu dans $C^9(7M^3, 2N^2, 2P^1)$. Cette dernière condition entraîne que P_2 est infiniment voisin de P_1 ou, en d'autres termes, que P_1 est

uni pour l'involution de Geiser J. Moyennant cette condition, le système obtenu est dérivé du type 3 de [N], n° 17, par imposition d'un point double; sa dimension vaut 4, son degré 6. Il n'est pas douteux qu'il soit irréductible et dépourvu de points-base accidentels.

Il n'existe pas de système irréductible admettant pour adjoint

$$|C_4| = C^6(7M^2, 2N^1, 2P^1),$$

où 2N, 2P *sont deux couples de l'involution* J *de Geiser engendrée par* $C^3(7M^1)$, *à moins que l'un de ces couples* (*ils doivent être supposés distincts*) *ne forme une coïncidence de* J. *Si c'est le cas pour* (2P), *il existe un système* $C^9(7M^3, 2N^2, P_1^2)$ *d'adjoint* $|C_4|$, *de dimension* 4 *et degré* 6. *Si les deux couples* 2N, 2P *forment des coïncidences de* J, *il existe deux systèmes analogues, d'ordre minimum. Tout autre système d'adjoint* $|C_4|$ *est subordonné aux précédents.*

21. Nous avons supposé, depuis le n° 18, que le système adjoint $|C_4|$, de degré 4, genre 3, composé au moyen d'une involution du second ordre, admettait un faisceau de bisécantes elliptiques; nous avons reconnu qu'il fallait encore examiner le cas où il existe un faisceau de courbes unicursales E bisécantes aux courbes C_4. Le reste $C_4 - E$ est alors un faisceau irréductible $|H|$, formé de bisécantes aux courbes C d'adjoint $|C_4|$ (*cf.* n° 17), de sorte que C appartient à l'involution J au moyen de laquelle $|C_4|$ est composé. Le genre virtuel des courbes H vaut 2. Nous pouvons admettre aussi cette valeur pour le genre effectif; en effet, si celui-ci valait 1, nous serions ramenés à l'étude des n°s 18-20; et, s'il était nul, C, possédant un faisceau de bisécantes rationnelles, aurait l'adjoint réductible. Tablons donc sur l'existence d'un faisceau $|H|$ de genre 2, doué d'un faisceau de bisécantes rationnelles E. En prenant pour $|E|$ un faisceau de rayons de sommet M, on ramène sans peine $|H|$ à l'un des types suivants, d'ordre minimum : *a*. $H^1(M^2, 12P_1)$; *b*. $H^2(M^3, N^2, 12P^1)$, où N est dans le domaine du premier ordre de M et où les 12 P_i sont infiniment voisins successifs sur une branche linéaire inflexionnelle issue de M. Ainsi $|C_4|$ est du type $C^5(M^3, 12P^1)$ ou $C^6(M^4, N^2, 12P^1)$. En nous rapportant encore à la quadrique double image de $|C_4|$, nous trouvons aussitôt que C doit appartenir au système $|E+2H|$, soit respectivement $C^9(M^5, 12P^2)$ et $C^{11}(M^7, N^4, 12P^2)$ pour les cas *a* et *b*.

22. Développons le cas *a*. Le système C est contenu dans un système d'ordre 9 et est par suite d'ordre minimum 8 ou 9.

Dans la première éventualité, $|C|$ est effectivement du type $C^8(M^7, 11P^2, P'^2)$. La multiplicité effective des courbes C au point M est déterminée par le fait que C est quadrisécante des droites E issues de M. D'autre part, le comportement de l'adjoint $|C_4| = C^5(M^3, 12P^1)$ n'autorise pas que les courbes C passent plus de deux fois par un point P_i, propre ou impropre. Il suffit alors d'exprimer

que la courbe C est bisécante des quartiques du faisceau $H^4(M^2, 12P^1)$ pour voir que C est du type décrit ci-dessus ou du type $C^8(M^4, 10P^2, P_{11}^1, P_{12}^1, X^2)$; mais un examen un peu attentif montre que le dernier système ne peut avoir $|C_4|$ pour adjoint. Puisque C est contenu dans le système $|E+2H| = C^9(M^5, 12P^2)$, il est nécessaire que P_{12} soit aligné sur M, P_{11} et infiniment voisin de P_{11}. Réciproquement, quand ces deux conditions sont réalisées, $|C|$ existe, irréductible, de dimension 3 et degré 4. En effet, $|E+2H|$ est ∞^3; les courbes de ce système assujetties à contenir le domaine de P_{11}, puis la droite $MP_{11}P_{12}$ laissent précisément pour reste les ∞^3 courbes C; comme le système $|C|$ ainsi obtenu contient $|2H|$, il est bien irréductible, de degré effectif 4.

Passons au cas où C est d'ordre *minimum* 9. Il est clair que C passe exactement cinq fois en M et trois fois au plus en P_i. D'autre part, il est exclu que P_1 et P_2 soient triples pour C, qui pourrait alors être ramenée à l'ordre 7 par la transformation quadratique, nécessairement existante, de points fondamentaux M, P_1, P_2. Le fait que C est bisécante des quartiques H montre ensuite que C est du type $C^9(M^5, 12P^2, 2X^2)$ ou $C^9(M^5, P_1^3, P_2^2, \ldots, P_{11}^2, P_{12}^1, X^2)$. Le second type sera d'ordre minimum pour autant que P_1 soit infiniment voisin de M et que $P_2, P_3, \ldots, P_{11}, X$ puissent être amenés à se succéder sur une branche issue de M dont les deux premiers points soient alignés sur M; dans ces conditions, il ne peut manifestement admettre $|C_4|$ pour adjoint pur. Quant au premier type, il doit posséder une droite fondamentale impropre MX_1X_2, tandis que X_1 et X_2 sont unis pour l'involution J[N, n° 18] des couples communs à E, H; en d'autres termes, X_1 et X_2 sont les points d'intersection d'une droite E_0 issue de M et de la courbe unie de l'involution J. Le système obtenu $C^9(M^5, 12P^2, 2X^2)$ a le degré virtuel zéro et est effectivement un faisceau, généralement irréductible, comme on peut le voir soit par un raisonnement direct, soit en observant qu'il est représenté, sur la quadrique double Q image de C_4, par l'ensemble des cubiques gauches tangentes à la courbe de diramation j aux deux points d'appui x_i de celle-ci sur la génératrice e_0 homologue de E_0. La condition d'irréductibilité de ces cubiques gauches est qu'en un des points x_i, supposés distincts, la courbe j ne soit pas tangente à la génératrice h homologue de la quartique H qui contient X_i. Il suffit donc de choisir E_0 pour que les courbes H qui touchent E_0 en X_1 ou X_2 ne passent pas doublement par ces points.

Un système surabondant $C^7(M^3, 12P^1)$, *de genre et de dimension* 3, *est généralement l'adjoint d'une infinité continue de faisceaux* $C^9(M^5, 12P^2, 2X^2)$, *dont les deux points-base* X_i *sont alignés sur* M *et unis pour l'involution* J *des couples communs aux droites issues de* M *et aux quartiques du faisceau irréductible* $H^4(M^2, 12P^1)$; *ces faisceaux appartiennent à* J *et sont d'ordre minimum. En outre, quand deux points* P_{11}, P_{12} *sont infiniment voisins et alignés sur* M (*ou se succèdent sur une branche dont la tangente passe en* M), $C^5(M^3, 12P^1)$ *est aussi*

l'adjoint d'un système irréductible $C^8(M^4, 11P^2)$ *de dimension* 3, *degré* 4 *et surabondance* 2, *composé au moyen de* J. *Il existe plusieurs systèmes analogues si plusieurs couples de points* P_i *présentent la disposition de* P_{11}, P_{12}.

Pour la seconde fois, nous sommes en présence d'un système adjoint à plusieurs systèmes typiquement distincts. L'exemple actuel est d'une analogie frappante avec celui rappelé dans l'Introduction. Il semble que l'on doive s'attendre à voir ce phénomène se multiplier à mesure que le genre augmente, du moins pour les systèmes composés. S'il n'a pas été mis jusqu'ici en évidence pour le genre 3, c'est probablement parce qu'on n'a pas encore fait une classification *géométrique* des systèmes de ce genre (1), et notamment parce qu'on n'a pas encore déterminé les faisceaux. Il n'est en tout cas plus admissible de croire que l'exemple, cité dans l'introduction, de plusieurs systèmes typiquement distincts possédant même adjoint soit une exception.

23. Envisageons le cas *b*. du n° 21, relatif à l'adjoint

$$|C_1| = C^6(M^4, N^2, 12P^1) = |E + H|,$$

où $|E|$ est le faisceau de rayons de sommet M et $|H|$ le faisceau des courbes de genre effectif deux $H^5(M^3, N^2, 12P^1)$; N est infiniment voisin de M et les $12P_i$ infiniment voisins successifs de M sur une branche linéaire inflexionnelle. Le système $|C|$ cherché est contenu dans $|E+2H| = C^{11}(M^7, N^3, 12P^2)$, de dimension 5, degré 8 et genre 6, et est par suite, du moins à priori, d'ordre minimum $m = 9$, 10 ou 11. Les courbes C passent $m-4$ fois en M, car elles sont effectivement quadrisécantes aux droites E; de plus, puisqu'elles sont supposées irréductibles, on déduit de la configuration toute spéciale des points M, N, 12P qu'elles passent au plus deux fois en chaque point P_i. Il suffit alors d'exprimer que les courbes H sont effectivement bisécantes de C pour voir que le système $|C|$ se réduit à l'un des types suivants : 1° $C^9(M^5, N^3, 8P^2, 4P^1)$; 2° $C^9(M^5, N^3, 11P^2, P^0_{12})$; 3° $C^9(M^5, N^3, 10P^2, P^1_{11}, P^1_{12}, Q^2)$; 4° $C^9(M^5, N^2, 12P^2, Q^2)$; 5° $C^{10}(M^6, N^4, 11P^2, P^0_{12})$; 6° $C^{10}(M^6, N^3, 10P^2, P^1_{11}, P^1_{12}, Q^2)$; 7° $C^{10}(M^6, N^3, 12P^2, 2Q^2)$; 8° $C^{11}(M^7, N^3, 12P^2, 2Q^2)$, que nous pouvons

(1) Un exemple caractéristique des lacunes qui subsistent dans l'étude géométrique des systèmes de genre 3 est précisément celui du système irréductible $C^5(M^3, 12P^1)$ de dimension 3. De Franchis [IV] en renseigne la construction quand il existe une cubique fondamentale $C^3(M^1, 12P^1)$ et donne un autre exemple, assez compliqué. Or, géométriquement, il est aisé de définir tous les systèmes de cette espèce. Le reste de $C^5(M^3, 12P^1)$ par rapport au faisceau de rayons E de sommet M est irréductible chaque fois que sa partie variable ne se réduit pas à $|E|$ (*cf.* n° 17). Ainsi, les dispositions possibles des points-base se rattachent à deux types: ou bien il existe une cubique fondamentale $C^3(M^1, 12P^1)$, ou bien M et les P_i forment la base d'un faisceau irréductible $H^5(M^2, 12P^1)$; les multiplicités assignées pour les points-base de ce dernier sont effectives, sinon on ne saurait retrouver par sommation un système $C^5(M^3, 12P^1)$ de dimension 3 et degré 4. Comme nous l'avons vu, seuls les systèmes du second type peuvent être des systèmes adjoints.

supposer d'ordre minimum. Bien entendu, les multiplicités renseignées des courbes C aux points M, N, 12P, Q sont les multiplicités effectives. Quelques-uns des types décrits peuvent être exclus d'emblée : le 1° parce que les relations de proximité ne sont pas satisfaites au point M; le 3° et le 6°, car, ou bien les coniques menées par les points M, N, Q sont irréductibles et l'on pourrait abaisser l'ordre des deux systèmes envisagés à 8, ou bien le point Q est proche de P_{10}, mais distinct de P_{11} et les relations de voisinage ne sont plus satisfaites en P_{10}.

L'adjoint $|C_1|$ est de dimension 3 et de degré 4; il est composé au moyen de l'involution J des couples d'intersections libres des droites E et des quintiques H. D'autre part, on peut vérifier, en application du principe de décharge-ment, que la droite MP_1P_2 comptée cinq fois est une courbe particulière du faisceau $|H|$. Ainsi, la polaire de M par rapport à une courbe H reste fixe quand H engendre le faisceau $|H|$ et contient la courbe unie de J. D'ailleurs, en prenant les droites MN et MP_1P_2 respectivement pour côtés $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ du triangle de référence, le faisceau $|H|$ est représenté par l'équation

$$x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 f_2(x_2, x_3) + f_5(x_2, x_3) + k x_2^5 = 0;$$

la polaire de M par rapport à ce faisceau est représentée analytiquement par

$$x_2 x_3 [2 x_1 x_2 + f_3(x_2, x_3)] = 0$$

et la courbe unie de l'involution J est une conique j passant *une* fois en M, touchant en ce point la droite MN. Évidemment, ce calcul nous fournit seulement la courbe unie effective j de l'involution J. En réalité, J possède encore deux courbes unies infinitésimales : le domaine de M et le domaine de P_{12}. En effet, les courbes H découpent sur une droite E quelconque issue de M les couples de la g_2^1 induite sur E par J; or, nous savons que la droite MP_1 comptée cinq fois est une courbe H particulière, de sorte que la g_2^1 considérée possède un couple formé de deux points infiniment voisins de M : le domaine du premier ordre de M a pour conjugué dans J le domaine du second ordre de ce point. De plus, comme les couples de J sont formés de points alignés sur M, il est clair que tout point infiniment voisin de P_{12} a pour homologue dans J un point situé dans le domaine du second ordre de P_{12}. La courbe unie totale de J est bien rencontrée en deux points variables par les droites E et en six points variables par les quintiques H de genre 2.

L'image projective du système $|C_1|$ est une quadrique double Q, douée de deux systèmes distincts de génératrices rectilignes, $|e|$, $|h|$, correspondant respectivement aux faisceaux $|E|$, $|H|$. Les courbes C_1 qui contiennent la droite MP_1P_2 sont complétées par les quintiques irréductibles $C^5(M^3, N^2, 10P^1)$ d'un réseau de degré 2 et genre 2 (contenant le faisceau $|H|$); ainsi, la droite MP_1P_2 a pour homologue un point A de Q, double ou triple pour la courbe de diramation, certainement simple pour la sextique k image de la

conique j. Les courbes C_1 assujetties à passer deux fois en P_{12} contiennent la droite MP_1P_2 et sont complétées par les quintiques H (virtuellement, les courbes H ne passant pas en P_{12}), de sorte que les domaines du premier et du second ordre de P_{12} correspondent à une droite e_A de Q, précisément la génératrice e menée par A, ne recoupant pas k. De même, les courbes C_1 passant cinq fois en M se composent de la droite MP_1P_2 comptée cinq fois et d'une droite E quelconque : les domaines du premier et du second ordre de M représentent la génératrice h_A de $|h|$ qui passe par A et k a un contact 5-ponctuel avec h_A au point A. D'autre part, les courbes C_1 contenant la droite MN sont complétées par les quintiques irréductibles $C^5(M^3, N^1, N_1^1, 12P^1)$ d'un réseau de degré 2 et genre 3, doué d'un point-base N_1 proche de N, puisque les quintiques H en sont des courbes particulières; la droite MN et le domaine de N_1 ont pour homologue sur Q un point B, non situé sur e_A ou h_A. Quant au domaine du premier ordre de N, il représente visiblement la génératrice e_B de $|e|$ menée par B, s'appuyant sur k en un point, généralement distinct de B, dont l'homologue est alors le point uni U infiniment voisin de N sur j.

Les cubiques gauches du système $|e+2h|$ qui touchent e_A en A sont irréductibles et correspondent précisément aux courbes C du type 5° : le système $C^{10}(M^6, N^4, 11P^2)$ est irréductible, ∞^3, de genre 4 et degré 4, et admet bien $|C_1|$ pour adjoint pur (compte tenu de la surabondance de ce dernier). Parmi ces cubiques gauches, celles qui passent en B sont encore irréductibles; elles représentent les courbes C du type 2°, de sorte que le système $C^9(M^5, N^3, 11P^2)$ est un réseau de degré 2, contenu dans le système ∞^3 obtenu à l'instant, qui répond encore à la question; observons qu'il possède un point-base supplémentaire, proche de N, le point N_1 défini à l'alinéa précédent.

Les courbes C du type 7° ou 8° ne peuvent convenir. Puisqu'elles sont supposées d'ordre minimum, les deux points doubles Q_1, Q_2 sont infiniment voisins successifs de P_{12}, donc non situés sur la conique j. De plus, elles doivent rencontrer la courbe unie totale de J en 10 intersections impaires. Or, elles passent en un point uni du domaine de M, de sorte que les 11 points qu'elles ont en commun avec j, en dehors des points M, N, 12P, 2Q, forment 9 intersections impaires. Ainsi, les courbes C considérées touchent nécessairement la conique unie j en un point T; elles passent *une* fois en T et au conjugué T_1 de T dans l'involution J. Par suite, la droite MT touche la conique j au point T, puisque T_1 est proche de T; elle constitue une partie de la conique j et coïncide avec MN. Mais cette conclusion est absurde, car elle entraîne la dégénérescence des courbes C (1).

Il nous reste à éliminer les courbes C du type 4°, soit $C^9(M^5, N^2, 12P^2, Q^2)$.

(1) On peut encore observer que les points doubles Q_1, Q_2, infiniment voisins de P_{12}, sont unis pour l'involution J, et doivent par suite être proches de P_{12}, ce qui est absurde, puisque P_{12} est double pour la courbe C.

A cet effet, nous allons d'abord préciser la position du point N_4. Ce point est infiniment voisin de N sur la quartique $|H-MN| = H^4(M^2, N^4, 12P^1)$, d'équation

$$x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_3 f_2(x_2, x_3) + f_4(x_2, x_3) = 0,$$

où l'on a posé

$$f_5(x_2, x_3) \equiv a_0 x_3^5 + x_2 f_4(x_2, x_3);$$

cette quartique H^4 correspond à la valeur $-a_0$ du paramètre k. N_4 appartiendra à la droite MN si $f_2(0,1) = 0$; la conique j se réduit alors à la droite MN et à une droite j_1 ne passant pas en M; en outre, sur Q, la sextique k passe en B.

Dans le cas général, où N_4 n'est pas situé sur MN, les ∞^4 courbes du système $|E+2H-MN| = C^{10}(M^6, N^3, N_1^4, 12P^2)$ rencontrent MN en un point variable, de sorte que le système $|E+2H-2MN| = C^9(M^5, N^2, 12P^2)$ est un réseau, contenant la courbe C à l'étude. Or, ce réseau est formé de courbes dégénérées en une partie fixe $H^4(M^2, N^4, 12P^1)$ et une composante $C^5(M^3, N^4, 12P^1)$, variable dans le réseau $|C_1 - MN|$. En revanche, quand N_4 est situé sur MN, le système $|E+2H-2MN| = C^9(M^5, N^2, 12P^2)$ est ∞^3, donc irréductible et de degré effectif 4; ses courbes ont pour images, sur Q, les cubiques gauches du système $|e+2k|$ qui touchent en B la sextique de diramation k. Les courbes C cherchées sont des courbes C^9 de ce système assujetties à passer deux fois en un certain point Q, proche de N par le comportement de l'adjoint $|C_4|$, mais distinct de N_4, sinon les cubiques gauches homologues auraient un point double en B et seraient par suite dégénérées. En outre, le point Q doit être uni pour l'involution J [N, n° 18]; il coïncide avec le second point uni du domaine de N, le premier point uni de ce domaine étant N_1, et a pour image le point commun aux génératrices e_B, h_A. En conséquence, les courbes C sont représentées par des cubiques gauches touchant en ce dernier point la courbe de diramation de Q, plus précisément la droite h_A. Comme ces cubiques gauches appartiennent au système $|e+2h|$ et sont unisécantes des génératrices h, elles contiennent la droite h_A, de sorte que les courbes C sont dégénérées.

Tout système irréductible $C^6(M^4, N^2, 12P^1)$, *de genre et dimension* 3, *degré* 4 *et surabondance* 1, *somme des faisceaux irréductibles* $E^4(M^1)$, $H^5(M^3, N^2, 12P^1)$, *supposé que* N *est proche de* M *et que les* $12P_i$ *se succèdent sur une branche linéaire inflexionnelle issue de* M, *est l'adjoint pur* $|C_1|$ *d'un système irréductible* $C^{10}(M^6, N^4, 11P^2)$ *d'ordre minimum, de degré* 4 *et dimension* 3, *composé au moyen de l'involution* J *des couples communs aux droites* E *et aux quintiques* H. *Tout système irréductible d'adjoint* $|C_1|$ *est contenu dans le précédent et a l'ordre minimum* 10 *ou* 9 (1); *dans ce dernier cas, il appartient au réseau* $C^9(M^5, N^3, 11P^2, N_1^1)$,

(1) Il est d'ordre minimum 10 quand ses couples de points-base simples sont infiniment voisins de P_{11}; sinon, son ordre est réductible à 9.

de degré 2, *dont le point-base supplémentaire* N_1 *est proche de* N *sur la quartique* $|H - MN| = H^3(M^2, N^1, 12P^1)$.

24. *Systèmes adjoints réductibles.* — Nous abordons l'étude des systèmes irréductibles de genre 4 dont l'adjoint pur $|C_1|$, de genre effectif p_1 inférieur à 4, est le triple d'un faisceau $|E|$. Si p est le genre des courbes E, p_1 vaut $3p$, et nous devons prendre p égal à 0 ou à 1. Mais le cas $p = 1$ est à rejeter. En effet, dans [N], n° 27, se trouvent décrits les systèmes infinis de genre quelconque dont l'adjoint pourrait être composé au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques. Certaines particularités nous ayant conduits à mettre en doute l'existence de ces systèmes, nous avons démontré depuis qu'effectivement ils n'existent pas. La démonstration sera publiée bientôt [VI]; nous nous bornons ici à appliquer anticipativement le résultat aux systèmes de genre 4.

Supposons en conséquence l'adjoint $|C_1|$ composé au moyen d'un faisceau de courbes rationnelles E, bisécantes des courbes C. $|C|$ peut être ramené à un système de courbes d'ordre n douées d'un point $(n-2)$-uple M et de $k = n - 6$ points doubles N_i, outre des points-base simples P_j. Si k dépasse 1, tous les N_i doivent être proches de M pour que $|C|$ soit d'ordre minimum, et l'on sait [III, l. II, n° 29] qu'ils peuvent même être ramenés dans le domaine du premier ordre de M. La relation de proximité permet de montrer que $|C|$ appartient totalement à l'un des systèmes suivants : *a.* $C^6(M^4)$; *b.* $C^7(M^5, N^2)$; *c.* $C^8(M^6, 2N^2)$; *d.* $C^9(M^7, 3N^2)$; *e.* $C^{10}(M^8, 4N^2)$.

Ces systèmes sont irréductibles [I], réguliers et simples, de dimension 17, degré 20, et d'ordre minimum [III, *loc. cit.*]. Pour que les systèmes subordonnés soient à leur tour d'ordre minimum, il est nécessaire de poser quelques restrictions au choix des points-base simples P_j. Tout d'abord, le système *a.* reste évidemment d'ordre minimum quelle que soit la position de ses points-base. Le système *e.* ne peut admettre aucun point-base simple, pas plus que *b.* quand N est distinct de M. Pour les cas *b.*, *c.*, *d.*, avec tous les points-base doubles dans le domaine du premier ordre de M, il faut prendre tous les P_j infiniment voisins de M. On peut supposer qu'aucun ne soit consécutif à un point double N_i, car il doit alors être proche de M et peut être ramené dans le domaine du premier ordre de M par une transformation quadratique de seconde espèce. Si plus de deux points P_j sont infiniment voisins successifs de M sur une branche linéaire, celle-ci est inflexionnelle, sinon il existerait une transformation de Jonquières du troisième ordre qui abaisse l'ordre du système. Il se peut aussi, relativement aux cas *b.*, *c.*, que des points P_j se succèdent sur une branche du second ordre issue de M, mais alors ces points sont au plus au nombre de 4, sinon on pourrait de nouveau construire une transformation de Jonquières, du quatrième ordre, qui abaisse l'ordre du système. Enfin, dans le cas *b.*, plusieurs P_j peuvent se succéder sur une branche du troisième ordre

issue de M, mais en nombre au plus égal à 6, de manière qu'aucune transformation d'ordre 5 ne réduise l'ordre du système.

Réciproquement, les conditions imposées aux points-base sont suffisantes pour que les systèmes *b.*, *c.*, *d.*, aient l'ordre minimum. Donnons par exemple la démonstration dans le cas *b*. Une transformation qui abaisse l'ordre de $|C|$ ne peut évidemment élever l'ordre des droites issues de M au moyen desquelles est composé $|C_1|$, puisque $|C|$ est d'ordre inférieur à 10; c'est donc une transformation de Jonquières, définie par un réseau de courbes d'ordre m qui passent $m-1$ fois en M et simplement en $2m-2$ points, parmi lesquels éventuellement le point double N de C et $\gamma \leq 6$ points-base simples P_j. La limitation de γ vaut, comme on le vérifie immédiatement, quels que soient les ordres des branches de C issues de M dans les directions différentes de MN. La condition d'abaissement de l'ordre montre que m vaut au plus 4. Mais la disposition des points-base empêche des quartiques d'avoir plus de 6 intersections avec les courbes C dans le domaine de M, alors qu'il en faudrait au moins 7 pour que l'abaissement de l'ordre ait lieu. Les valeurs 3, 2 de m n'ont pas plus de succès.

En résumé :

Les systèmes infinis de genre 4 dont l'adjoint, de genre inférieur à 4, est composé au moyen d'un faisceau (de courbes nécessairement rationnelles) sont réductibles aux types d'ordre minimum :

a. $C^6(M^4)$ et subordonnés;

b. $C^7(M^3, N^2)$: en plus, si N est proche de M, les systèmes dérivés du précédent par imposition de points-base simples, tous infiniment voisins de M sur des branches non tangentes à MN; une branche d'ordre t ($t = 1, 2, 3$) contient au plus $2t$ points-base simples, sauf si elle est d'ordre 1 et de classe 2 (inflexionnelle).

c. $C^8(M^6, 2N^2)$, où les $2N_i$ sont situés dans le domaine du premier ordre de M, et les systèmes subordonnés, à points-base simples successifs sur deux branches linéaires ou sur une branche d'ordre 2, branches issues de M et non tangentes à MN_i; une branche d'ordre 2 en contient 4 au plus, une branche linéaire non inflexionnelle 2 au plus.

d. $C^9(M^7, 3N^2)$, les $3N_i$ situés dans le domaine du premier ordre de M, et les systèmes dérivés par imposition de points-base simples, infiniment voisins successifs de M sur une branche linéaire non tangente à MN_i, et inflexionnelle si les points-base simples sont en nombre supérieur à 2.

e. $C^{10}(M^8, 4N^2)$, où les $4N_i$ sont dans le domaine du premier ordre de M.

En l'absence de points-base simples, ces systèmes de courbes hyperelliptiques sont simples et réguliers, de dimension 17 et degré 20.

Ainsi se termine à son tour la recherche des systèmes infinis de genre 4 dont l'adjoint pur, tout en ayant le genre inférieur à 4, n'est pas simple. Nous avons dit que, dans cette partie, nous n'étions pas en mesure d'obtenir à coup sûr les courbes isolées. Il faut entendre cette restriction de la manière suivante. Pour chacun des systèmes C_1 qui ont été successivement mis à l'étude, nous avons déterminé tous les systèmes d'ordre minimum, y compris les courbes isolées,

qui admettent $|C_4|$ comme adjoint. En d'autres termes, il n'existe aucune courbe isolée qui, sans se rattacher aux systèmes classés par nous, admette le même adjoint qu'un de ces systèmes. Mais il n'est pas exclu que des courbes isolées puissent admettre d'autres adjoints $|C_4|$ que ceux repris dans notre étude.

CHAPITRE III.

SYSTÈMES ADJOINTS DE GENRE AU MOINS ÉGAL A 4.

25. Nous terminons notre étude par un chapitre relatif aux systèmes $|C|$ dont l'adjoint pur a le genre au moins égal à 4. Antérieurement au mémoire [N], les seuls systèmes connus de genre p non supérieur à celui de leur adjoint étaient deux faisceaux de genre 2 et deux réseaux de genre 3 [IV]. Le Mémoire [N] donne pour la première fois des exemples très généraux et aborde l'étude de ces systèmes. Il montre notamment que leur dimension vaut au plus $p-1$. Si l'on considère que, jusqu'ici, seuls les systèmes infinis ont été étudiés, et que, de plus, les faisceaux de genre 3 ne sont pas connus, on s'explique pourquoi les exemples précédemment connus avaient précisément la dimension $p-1$. Ici encore, c'est à cette dimension que nous allons nous limiter : nous allons déterminer les systèmes triplement infinis de genre 4 dont l'adjoint a le genre au moins égal à 4. La recherche des systèmes de dimension moindre semble assez ardue pour que nous nous réservions d'y consacrer plus tard nos efforts.

Pour les systèmes triplement infinis, au contraire, nous bénéficions d'emblée des résultats de [N]. Tout d'abord, l'adjoint pur $|C_4|$ est irréductible et de genre 4 ou 5 [N, n^{os} 28, 35]. $|C|$ est composé de courbes hyperelliptiques, a le degré effectif 4, de même que $|C_4|$, appartient en même temps que $|C_4|$ à une involution J du second ordre, et admet un faisceau $|E|$ de bisécantes elliptiques ou de genre 2 (*ibid.*, n^{os} 35, 36).

Si les courbes E sont elliptiques, $|C|$ relève de la classification faite dans le Mémoire [N], n° 40; il est un des trois systèmes suivants :

1° $C^{15}(8M^5, N^3, P^2, Q^1)$, où les $8M_i$ forment avec Q la base d'un faisceau de cubiques elliptiques, et où N, P sont deux points distincts de Q, unis pour l'involution de Bertini de points fondamentaux M_i. $|C_4|$ a le genre 4, puis les adjoints purs successifs les genres 3, 2, 1.

2° $C^{10}(M^4, 8N^3, 2P^2)$, où M et les $8N_i$ forment la base d'un faisceau de cubiques elliptiques E, tandis que les deux P_j sont deux points unis distincts pour l'involution J des couples de E alignés sur M. $|C_4|$ a le genre 4, les adjoints suivants les genres 2 et 0.

3° $C^{12}(8M^3, N^2, 2P^2)$, où les $8M_i$ forment avec N la base d'un faisceau de cubiques elliptiques E, où les deux P_j sont deux points unis distincts pour

l'involution de Bertini de points fondamentaux $8M_i$. Les adjoints successifs ont les genres 4, 2, 1.

26. Il nous reste à étudier les systèmes $|C|$ triplement infinis de genre 4 doués d'un faisceau $|E|$ de bisécantes de genre 2. $|C|$ est toujours composé au moyen d'une involution J du second ordre à laquelle appartiennent les courbes E. Le reste $|C-E|$ est un faisceau irréductible, à moins que sa partie variable ne soit précisément $|E|$ (*cf.* n° 17). S'il est irréductible et distinct de $|E|$, son genre virtuel vaut 1. Comme $|C|$ ne peut admettre un faisceau de bisécantes rationnelles sans que $|C_1|$ ne soit composé au moyen de ce faisceau, nous devons supposer que les courbes $|C-E|$, bisécantes de C, ont effectivement le genre 1; nous sommes ramenés à l'étude du numéro précédent.

Admettons maintenant que la partie variable de $|C-E|$ se réduise à $|E|$. En d'autres termes, le système triplement infini $|C|=|2E+F|$ possède une courbe fondamentale totale F, monovalente et impropre, éventuellement dégénérée. D'ailleurs, d'après une remarque faite dans l'introduction, l'adjoint pur $|C_1|$ contient $|E+E_1|$ et se réduit exactement à ce système ∞^3 puisqu'il est lui-même ∞^3. On observera que la sommation précédente est effectuée par rapport à la base *totale* des faisceaux $|E|$, $|E_1|$ et que les genres virtuels des systèmes $|E|$, $|E_1|$, $|C_1|$, relatifs à cette base, sont égaux aux genres effectifs de ces systèmes. Partant, les courbes E_1 sont effectivement quadrisécantes des courbes C et leur genre effectif vaut 2 ou 1 suivant que C_1 est de genre 5 ou 4. En outre, les courbes C découpent sur une courbe E_1 une série g_4 d'ordre 4, nécessairement composée, donc de dimension inférieure à 3, de sorte que le faisceau $|E_1|$ est contenu dans le système $|C|$.

Envisageons en premier lieu le cas où les courbes E_1 sont de genre 2. Puisque $|C|$ contient $|E_1|$, l'adjoint $|C_1|$ contient le faisceau $|E_2|$. Les courbes E_2 sont bisécantes des courbes E et ne peuvent être unicursales, sinon $|E_1|$ coïnciderait avec $|E_2|$; leur genre ne peut non plus surpasser 1, sans quoi le faisceau $|E|$ serait réductible à $E'^3(M^3, 9N^1)$ [IV, VII] et, comme nous le montrons ailleurs [VII], les courbes E, E_2 seraient quadrisécantes. Ainsi, le faisceau $|E_2|$ est formé de courbes elliptiques bisécantes des courbes E. Par suite [VII], le faisceau $|E|$ est crémoniennement identique à $E^9(8M^3, 2N^2, P^1)$; on doit avoir *effectivement* $|E_1|=E_1^6(8M^2, 2N^1, P^0)$ et $|E_2|=E_2^3(8M^1, 2N^0, P^1)$. Les $8M_i$ sont les points fondamentaux d'une involution J de Bertini, de point uni isolé P; les points $2N_i$ sont unis pour J [N, n° 18] et distincts [N, n° 19]; $|E_1|$ possède deux points-base supplémentaires $2Z_j$, où Z_j est infiniment voisin de N_j sur la cubique $G_j^3(8M^1, N_j^1, Z_j^1, P^1)$ $(j=1, 2)$; de plus, $|C|$ est composé au moyen de cette involution J de Bertini.

Le recours à la quadrique double image projective de

$$|C_1|=|E+E_1|=C_1^{15}(8M^5, 2N^3, 2Z^1, P^1)$$

montre que $|C|$ est contenu dans le système ∞^5

$$|2E + E_1| = D^{21}(8M^8, 2N^5, 2Z^1, P^2).$$

Ce dernier admet G_j^3 pour courbe fondamentale monovalente, même si cette cubique dégénère. Par suite, le système

$$|2E + E_1 - G_1^3 - G_2^3| = C^{18}(8M^6, 2N^3, 2Z^0, P^0)$$

a la dimension effective 3; comme il contient $|2E|$, il est irréductible et de genre effectif 4, les multiplicités indiquées étant respectées. Ce système $C^{18}(8M^6, 2N^3)$ a le degré effectif 4 et admet bien $|C_1|$ pour adjoint pur (compte tenu de la surabondance 3 de $|C_1|$) : il constitue une solution du problème posé. Nous allons montrer que tout système linéaire $|C|$, triplement infini, de courbes irréductibles dont l'adjoint $|C_1|$ est du type considéré est crémoniennement identique au système précédent, d'ordre minimum.

Observons tout d'abord que l'adjoint pur $|C_2|$, défini virtuellement par $|C_1|^{12}(8M^4, 2N^2, 2Z^0, P^0)$, contient le réseau $|2E_1|^{12}(8M^4, 2N^2, 2Z^2, P^0)$ et le système ∞^3 irréductible $|E + E_2|^{12}(8M^5, 2N^2, 2Z^0, P^2)$, auquel n'appartient pas toute courbe $2E_1$. Il est ∞^4, irréductible et effectivement $C_2^{12}(8M^5, 2N^2, 2Z^0, P^0)$. Outre cela, il est composé au moyen de l'involution J, puisque les courbes C_1 sont hyperelliptiques, et découpe sur une courbe C une série linéaire ∞^5 non simple, d'ordre au moins égal à 8; d'autre part, cette série doit être d'ordre au plus égal à 8 [N, n° 4]. Par suite, les courbes C, C_2 sont exactement octosécantes. Exprimons successivement que la courbe $C'(8M''', 2N'', 2Z^5, P'')$ est bisécante de E, quadrisécante de E_1 et octosécante de C_2 :

$$9t = 2 + 3S + 2(n_1 + n_2) + p, \tag{1}$$

$$6t = 4 + 2S + (n_1 + n_2) + (z_1 + z_2), \tag{2}$$

$$12t = 8 + 4S + 2(n_1 + n_2), \tag{3}$$

où S désigne la somme $m_1 + m_2 + \ldots + m_8$. De (2) et (3), on tire

$$z_1 = z_2 = 0; \tag{3'}$$

on déduit ensuite, de (1), (2) et (3'),

$$3t = S + 6 - p, \tag{1'}$$

$$n_1 + n_2 + 2p = 8. \tag{2'}$$

Par ailleurs, nous savons que $|C|$ contient $|2E|$ et que les courbes E, E_2 sont bisécantes. Donc, E_2 et C sont au moins quadrisécantes, et au plus sextisécantes, puisque $|C_1|$ contient $|E_2|$. D'où,

$$3t - S - p = 6 - 2p = 4 \text{ ou } 6, \qquad p = 1 \text{ ou } 0. \tag{4}$$

De plus, nous pouvons supposer sans restriction que l'ordre t de la courbe C ne peut être abaissé par une transformation quadratique dont les trois points

fondamentaux sont choisis parmi les $8M_i$, laissant par suite inaltérés les systèmes $|E_2|$, $|E_1|$, $|E|$, $|C_1|$. Ceci revient à postuler que la somme de trois quelconques des $8m_i$ ne surpasse pas t [N, n° 11]. Il suffit alors de former les 56 combinaisons des $8m_i$ pris 3 à 3 et de sommer tous les nombres écrits pour obtenir la relation $21S \leq 56t$ ou $8t \geq 3S = 3(3t + p - 6)$ ou encore $t \geq 3(6 - p)$. Comme t vaut au moins 18, on trouve $t = 18$, $p = 0$, $S = 48$. Dans ces conditions, $48 = S = (S + m_i) - m_i \leq 3t - m_i = 54 - m_i$ et $m_1 = m_2 = \ldots = m_8 = 6$. Enfin, par (2'), $n_1 + n_2 = 8$, d'où l'on tire $n_1 = n_2 = 4$, puisque le genre virtuel de C par rapport à la base (8M, 2N) vaut au moins 4. La thèse se trouve ainsi complètement établie.

27. Pour terminer, étudions les systèmes $|C| = |2E + F|$ triplement infinis de genre 4 doués d'un faisceau $|E|$ de bisécantes de genre 2 et d'un faisceau $|E_4|$ de quadrisécantes elliptiques, où $|E_4|$ est précisément l'adjoint pur de $|E|$. Nous avons vu que $|E_4|$ est contenu dans $|C|$ et que $|C_4|$ coïncide avec le système $|E + E_4|$ de genre 4. En outre, les courbes C_2 sont pour le moins octosécantes de C, puisque $|C_2|$ contient $|2E_4|$, et exactement octosécantes en vertu d'un théorème général démontré dans le Mémoire [N], n° 4. D'autre part, l'étude géométrique du faisceau $|E|$ se trouve exposée dans [N], n° 19: $|E|$ est réductible à l'un des types qui suivent :

1° $E^6(8M^2, 2N^4, 2P^4)$ avec adjoint elliptique $E_1^4(8M^4, Q^4)$, où 2N et 2P sont des couples de l'involution de Bertini J de points fondamentaux 8M, douée d'un point uni isolé Q;

2° $E^9(8M_i^3, 2U_i^2, Q^4)$ avec adjoint elliptique $E_1^6(8M_i^2, U_1^2)$ et faisceau $G^3(8M^4, Q^4)$, où U_1 et U_2 sont des points infiniment voisins sur la courbe unie de l'involution J décrite au 1°;

3° $E^7(M^3, 8N^2, 2U^2)$ avec adjoint elliptique $E_1^3(M^4, 8N^4)$, où les U sont les points de contact de deux cubiques du faisceau $|E_4|$ avec une même droite D issue de M. Les systèmes $|C|$ et $|C_4|$ sont alors composés au moyen de l'involution de Jonquières J des intersections libres des cubiques E_1' et des droites issues de M.

Dans le premier cas, $C^{12}(8M^4, 2N^2, P_1^2, P_2^6, Q^6)$ admet bien l'adjoint pur imposé $|C_4| = C_1^3(8M^3, 2N^4, 2P^4, Q^4)$, car $|C_4|$ est de surabondance 2 et l'on est en droit de considérer P_2 et Q comme ses points-base accidentels. Pour notre objet, il faut que C^{12} soit irréductible et ait effectivement le comportement décrit. Mais, en général, ceci n'aura pas lieu. En effet, on vérifie aisément que le double du réseau $H^6(8M^2, 2N^4)$ est un système irréductible $H^{12}(8M^4, 2N^2)$ dont la dimension effective vaut toujours 5 (quand les conditions imposées à la base sont respectées); par suite, C^{12} sera généralement de dimension 2 et coïncidera avec le réseau dégénéré $|2E|$. Ce raisonnement prouve encore que C^{12} sera ∞^3, irréductible, de genre et degré effectifs 4, sous la

condition nécessaire et suffisante que les 2P forment un couple en coïncidence de l'involution J, à laquelle appartiennent les courbes H^{12}. D'autre part, la méthode utilisée au numéro précédent permet de montrer que toute solution $|C$ est crémoniennement identique au système $|C^{12}$ que nous venons d'obtenir, ou au système analogue associé à l'autre couple (2N) si ce dernier est aussi en coïncidence. Il suffira de nouveau d'exprimer que $C'(8M''', 2N'', 2P'', Q'')$ est bisécante de E, quadrisécante de E_1 et octosécante de $C_2^5(8M^2)$, de se prévaloir en outre de l'hypothèse, encore licite dans le cas qui nous occupe, d'après laquelle la somme de trois quelconques des $8m_i$ est inférieure ou égale à t, pour voir que C se réduit à $C^{12}(8M^4, Q^0, 2N'', 2P'')$ où $n_1+n_2+p_1+p_2=6$. Comme le genre virtuel de C par rapport à la base indiquée n'est pas moindre que 4, les quatre entiers encore indéterminés sont, à l'ordre près, (3, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 0) ou (2, 2, 1, 1). Or, dans le dernier cas, C^{12} posséderait un point double ultérieur et serait de degré au plus égal à 2, tandis que le premier cas est inacceptable vu la nature de l'adjoint $|C_1|$.

28. Passons à l'examen du 2° du n° 27.

Pour la commodité du lecteur, situons de nouveau le problème. Soient $8M_i$ le groupe des points fondamentaux d'une involution de Bertini J, P le point uni isolé de cette involution, neuvième point-base du faisceau des cubiques elliptiques $G^3(8M_i', P^1)$, $2N_j$ deux points infiniment voisins l'un de l'autre situés sur la courbe unie de J. Le faisceau irréductible $|E| = E^9(8M^3, 2N^2, P^1)$ admet l'adjoint pur $|E_1| = E_1^6(8M^2, N_1^2)$. Il s'agit de déterminer les systèmes triplement infinis $|C| = C^t(8M_i^{m_i}, 2N_j^{n_j}, P^p, \ldots)$ dont l'adjoint pur $|C_1|$ coïncide avec le système somme $|E+E_1| = C_1^{15}(8M^5, N_1^4, N_2^2, P^1)$. Rappelons que $|C_1|$ a le degré et le genre effectifs 4, que ses courbes sont quadrisécantes de E_1, bisécantes de E, et appartiennent à l'involution J tout comme E, E_1, G et C_1. Notre premier objectif sera de déterminer les entiers non négatifs t, m_i, n_j, p par une discussion arithmétique appropriée. Nous pourrons évidemment supposer que l'ordre t des courbes C, au moins égal à 18, ne peut être abaissé par une transformation quadratique qui ne modifie pas la structure des systèmes $|E|$, $|E_1|$, $|C_1|$, $|G|$, et écrire en conséquence

$$m_i + m_j + m_k \leq t \qquad \text{pour } i \neq j \neq k. \tag{1}$$

Puisque C est quadrisécante de E_1 et bisécante de E, nous avons, en posant $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_8$,

$$3t = 2 + m + n_1, \tag{2}$$

$$n_2 + p = n_1 - n_2 + 1. \tag{3}$$

Le genre virtuel π de C par rapport à la base de $|C_1|$ est donné par la relation

$$2\pi = t^2 - \Sigma m_i^2 - \Sigma n_j^2 - p^2 + 2 - 3t + m + n_1 + n_2 + p,$$

ou encore, moyennant (2), par

$$t^2 - \Sigma m_i^2 - \Sigma n_j^2 - p^2 = 2\pi - n_2 - p. \tag{4}$$

En dehors de la base de $|C_1|$, le système $|C|$ possède encore exactement $\pi - 4$ points doubles; il est en effet de genre effectif 4 et ne peut avoir de points triples ultérieurs, puisqu'il est doué d'un faisceau de bisécantes $|E|$ dont la base coïncide avec celle de $|C_1|$. Par suite, son degré virtuel calculé par rapport à l'ensemble de ses points multiples (et de ses points-base simples éventuels contenus dans la base de $|C_1|$) vaut, compte tenu de (4),

$$2\pi - n_2 - p - 4(\pi - 4) = 16 - (2\pi + n_2 + p) \leq 4.$$

Puisque π est au moins égal à 4, ceci prouve que $n_2 + p$ ne peut dépasser 4. Or, N_2 étant proche de N_1, il est clair que la différence $n_1 - n_2$ n'est pas négative, de sorte que, par (3), $n_2 + p$ vaut au moins 4. En conséquence,

$$n_2 + p = 4, \qquad n_1 = n_2, \qquad \pi = 4. \tag{5}$$

D'autre part, les relations (1) donnent, par addition, $8t \geq 3m$; l'élimination de m entre cette inégalité et (2) fournit $18 \leq t \leq 3(2 + n_1)$, de sorte que n_1 est supérieur à 3. Les relations (5) et (4) montrent ensuite que

$$n_1 = n_2 = 4, \qquad p = 0, \qquad t^2 = \Sigma m_i^2 + 36. \tag{6}$$

(2) devient $3t = m + 6$ et l'élimination de m entre cette relation et $8t \geq 3m$ laisse $t = 18$, $m = 48$, $\Sigma m_i^2 = 288$. Or, par (1), $m_i + m_j + 2t \geq m$, $m_i + m_j \geq 12$, $m_k \leq 6$. Finalement,

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_7 = m_8 = 6, \qquad t = 18. \tag{7}$$

Au total, la seule solution arithmétiquement possible est $C^{18}(8M^6, 2N^4, P^0)$, sans autres points-base. L'existence du système précédent est quasi évidente, parce qu'il contient d'une part le réseau $|2E|$, et d'autre part la courbe $E_1^6(8M^2, N_1^2, N_2^1)$ comptée trois fois. Cette sextique existe bien à titre de courbe irréductible; elle correspond, sur le cône quadratique double image de $H^6(8M^3)$, à la section par le plan osculateur à la courbe de diramation en un point de celle-ci. Ainsi, l'équation $k_1 E^2 + k_2 \bar{E}^2 + k_3 E.\bar{E} + k_4 \bar{E}_1^3 = 0$, où E, $\bar{E}$, $\bar{E}_1$ sont les premiers membres des équations de deux courbes du faisceau $|E|$ et de la sextique considérée plus haut, représente le système irréductible $\infty^3 |C|$ à l'étude. L'adjoint de $|C|$ est virtuellement $C^{15}(8M^5, 2N^3)$, contient $|C_1|$ et se réduit à ce dernier, puisqu'il est aussi ∞^3 (1). On en déduit que $|C|$ est bien d'ordre minimum.

---

(1) Nous sommes en présence d'un cas typique d'augmentation et de *diminution* des multiplicités virtuelles de l'adjoint impur.

29. C'est encore une discussion arithmétique semblable à celles qui précèdent qui permet de montrer que le 3° du n° 27, ne correspond à aucun système irréductible $|C|$ triplement infini. Dans le cas présent, $|C| = C^t(M^m, 8N_i^{n_i}, 2P_j^{p_j}, \ldots)$ a encore le genre et le degré effectifs 4, possède un faisceau de bisécantes $E^7(M^3, 8N^2, 2P^2)$, un faisceau de quadrisécantes $E_1^3(M^1, 8N^1)$, et admet pour adjoint pur le système

$$|C_1| = |E + E_1| = C_1^{10}(M^4, 8N^3, 2P^2).$$

On en déduit aussitôt, en désignant par n la somme des $8n_i$, par p la somme des $2p_j$, par π le genre virtuel de C par rapport à la base de $|C_1|$,

$$3t = 4 + m + n, \tag{1}$$

$$m + 2p = t + 6, \tag{2}$$

$$2\pi = t^2 - m^2 - \Sigma n_i^2 - \Sigma p_j^2 + p - 2. \tag{3}$$

$|C|$ possède encore $\pi - 4$ points-base doubles ultérieurs. Son degré virtuel par rapport à la base précédente augmentée de ces $\pi - 4$ points est toujours au moins égal à 4, d'où, compte tenu de (3),

$$14 - p \geq 2\pi. \tag{4}$$

D'autre part, l'adjoint impur $|C'|$ de $|C|$ contient $|C_1|$ et est complété par une courbe fixe G. Les courbes C' passent $m - 1 + a \geq m - 1$ fois par le point propre M, les courbes C_1 passent 4 fois en ce point, tandis que G, d'ordre $t - 13$, y passe $t - 13 - b \leq t - 13$ fois. Par suite,

$$m - 1 + a = 4 + t - 13 - b, \qquad t - 8 = m + a + b \geq m.$$

Combinée avec (2), la dernière relation donne $2p \geq 14$, $p \geq 7$. Mais ceci est contradictoire avec (4), qui, moyennant $\pi \geq 4$, fournit $p \leq 6$.

30. Résumons les résultats obtenus dans ce Chapitre III.

Les systèmes linéaires irréductibles $|C|$ *de genre effectif* 4 *dont l'adjoint pur* $|C_1|$ *est formé de courbes de genre effectif* $p_1 \geq 4$ *sont tout au plus* ∞^3. *Lorsque* $|C|$ *est exactement* ∞^3, *il a le degré* 4 *et est composé au moyen d'une involution* J *du second ordre;* $|C_1|$, *formé de courbes irréductibles de genre effectif* 4 *ou* 5, *a aussi le degré* 4 *et est composé au moyen de* J. $|C|$ *est doué d'un faisceau* $|E|$ *de bisécantes elliptiques ou de genre* 2. *Dans le premier cas, il est réductible à l'un des trois types suivants, d'ordre minimum :*

1° $C^{15}(8M^3, N^4, P^2, Q^1)$, où les $8M_i$ forment avec Q la base d'un faisceau de cubiques elliptiques quadrisécantes, où N et P sont deux points, distincts de Q, unis pour l'involution J de Bertini de points fondamentaux $8M_i$. $|E|$ n'est autre que le faisceau $E^6(8M^2, N^2)$, tandis que $|C_1| = C_1^{12}(8M^3, N^3, N_1^1, P^4, P_1^1)$ a le genre 4 (N_1 et P_1 désignent respectivement les conjugués de N et P dans l'invo-

lution J); les adjoints purs successifs $C_2^2(8M^3, N^2, Q^1)$, $C_3^6(8M^2, N^1, N_1^1)$, $C_4^3(8M^1, Q^1)$ sont de genres 3, 2, 1 et de degrés 4, 2, 0.

2° $C^{10}(M^4, 8N^3, 2P^2)$, où M et $8N_i$ forment la base du faisceau $|E|$ des cubiques elliptiques bisécantes, tandis que les $2P_j$ sont deux points unis distincts pour l'involution J des couples de E alignés sur M. $|C_4| = C_1^7(M^3, 8N^2, 2P_j^1, 2\bar{P}_j^1)$ a le genre 4 ($\bar{P}_j$ est le conjugué de P_j dans J) et les adjoints purs suivants $C_2^3(M^2, 8N^1)$, $C_3^1(M^1)$ sont respectivement de genres 2, 0 et de degrés 4, 0.

3° $C^{12}(8M^4, N^2, 2P^2)$, où les $8M_i$ forment avec N la base du faisceau $|E|$ des cubiques elliptiques bisécantes, où les $2P_j$ sont deux points unis distincts pour l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8M_i$. Les adjoints purs successifs $C_1^7(8M^3, N^1, 2P_j^1, 2\bar{P}_j^1)$, $C_2^5(8M^2)$, $C_3^3(8M^1, N^1)$ sont respectivement de genres 4, 2, 1 et de degrés 4, 4, 0.

Dans le second cas, l'adjoint pur $|E_1|$ *du faisceau* $|E|$ *est formé de courbes de genre effectif* 2 *ou* 1, *quadrisécantes des courbes* C. *Si* E_1 *a le genre* 2, $|C|$ *est réductible au type décrit ci-après, d'ordre minimum :*

4° $C^{18}(8M_i^6, 2N_j^1)$, où les $2N_j$ sont des points distincts situés sur la courbe unie de l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8M_i$. L'adjoint pur $|C_1| = C_1^{15}(8M_i^5, 2N_j^2, 2Z_j^1, P^1)$, où P est le point uni isolé de J, où Z_j est proche de N_j sur la cubique $(8M^4, N_j^1, Z_j^1, P^1)$, a le genre 5 et le degré 4, tandis que les adjoints *purs* suivants $C_2^{12}(8M^4, 2N^3, 2Z^0, P^0)$, $C_3^9(8M^3, 2N^1, 2Z^0, P^0)$ (1), $C_4^6(8M^2)$, $C_5^3(8M^1, P^1)$ sont respectivement de genres effectifs 5, 4, 2, 1 et de degrés effectifs 8, 7, 4, 0. Dans cette suite de systèmes, seul $|C_3|$ n'appartient pas à l'involution J et est d'ailleurs simple (1). Quant au faisceau $|E|$, il n'est autre que $E^9(8M^3, 2N^2, P^1)$, d'adjoints purs $E_1^6(8M^2, 2N_j^1, 2Z_j^1)$, $E_2^3(8M^1, P^1)$.

Lorsque E_1 *est elliptique,* $|C|$ *est crémoniennement identique à l'un des deux types suivants, d'ordre minimum :*

5° $C^{12}(8M_i^5, 2N_j^2, P_1^2)$, où les $2N_j$ forment un couple de l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8M_i$, où P_1 est un point de la courbe unie de cette involution. Le faisceau $|E|$ est ici $E^6(8M^2, 2N^1, P_1^1, P_2^1)$, d'adjoint pur $E_1 = E_1^3(8M^1, Q^1)$, Q désignant le point uni isolé de J, P_2 le conjugué de P_1 dans J, proche de P_1 sur la cubique $(8M^1, Q^1, P_1^1)$. La suite des adjoints purs de C est $C_1^7(8M^3, 2N^1, 2P^1, Q^1)$, $C_2^5(8M^2)$, $C_3^3(8M^1, Q^1)$, de genres 4, 2, 1, de degrés 4, 4, 0.

---

(1) Nous savons (n° 26) que $|C_2|$ est composé au moyen de l'involution J; il a le genre 5 et le degré 8, la dimension 1; par suite, J induit sur la courbe C_2 générique une involution *elliptique*. Donc [VIII] C_2 est simple, ∞^1, de genre effectif 4; son degré effectif doit être supérieur à 6 et vaut précisément 7: C_2 est régulier et dépourvu de points-base accidentels.

6° $C^{18}(8M_i^6, 2N_j^2)$, où les $2N_j$ sont deux points infiniment voisins l'un de l'autre situés sur la courbe unie de l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8M_i$. P désignant le point uni isolé de J, on a $|E| = E^9(8M^3, 2N^2, P^1)$, $|E_1| = E_1^6(8M^2, N_1^2)$. L'adjoint pur $|C_1| = C_1^{15}(8M^6, N_1^4, N_2^2, P^1)$ a le genre 4 et le degré 4, et constitue un cas *particulier* du système décrit au 1°(1); les adjoints purs successifs sont de genres $p_1 = p_2 = 4$, $p_3 = 3$, $p_4 = 2$, $p_5 = 1$ et de degrés $D_1 = D_2 = D_3 = 4$, $D_4 = 2$, $D_5 = 0$.

CHAPITRE IV.

CONCLUSIONS.

Rassemblons maintenant, en un seul énoncé, l'essentiel de nos résultats, dans l'ordre où ils ont été exposés. Pour donner la classification complète des systèmes $|C|$ de genre 4 déterminés dans notre étude, nous devons renseigner pour chacun les adjoints pur successifs $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$, ..., qui permettent de distinguer entre eux plusieurs systèmes définis arithmétiquement de façon identique (2). Nous indiquerons même pour chaque cas les genres p_i et degrés effectifs D_i des adjoints $|C_i|$: ces nombres constituent les principaux invariants crémoniens arithmétiques de $|C|$. Bien que les adjoints successifs $|C_i|$ n'aient pas toujours été renseignés au cours de notre étude, il sera facile de vérifier l'exactitude de notre texte en ce qui les concerne.

La notation $C^n(aM^r, bN^s, \ldots)$, appliquée à $|C|$ ou à ses adjoints, désignera un système irréductible d'existence effective, d'ordre n, doué de a points-base *effectivement* r-uples, b points-base s-uples, etc., et *dépourvu de points-base* (accidentels) *non mentionnés*. Au contraire, la même notation, appliquée à une courbe isolée associée à $|C|$, par exemple une courbe fondamentale de C ou d'un adjoint, définit évidemment les conditions de passage *assignées* à cette courbe, de telle sorte que les multiplicités effectives imposées à cette courbe peuvent différer des multiplicités assignées : ainsi, lorsqu'une cubique fondamentale de $|C|$ est assujettie à passer simplement en 9 points-base de C, rien n'empêche qu'en réalité elle passe doublement au premier et ne contienne pas le second, pourvu que le compte des intersections avec les courbes C ne soit pas altéré. Ces changements de multiplicité pour les courbes fondamentales ont lieu pour des positions particulières des points-base et ne doivent pas modifier les caractères de $|C|$ tant que ce système reste irréductible.

---

(1) Le lecteur vérifiera que les caractères des adjoints successifs de C_1 sont les mêmes que dans le cas général.

(2) Rappelons qu'il s'agit des adjoints à indices inférieurs au sens de [N], n° 3 : $|C_i|$ n'est autre que l'adjoint pur de $|C_{i-1}|$.

Le nombre r que nous renseignons pour chaque cas est la dimension effective du système $|C|$ correspondant quand on ne lui impose aucun point-base simple. En plus de ces systèmes de dimension maxima, notre classification englobe aussi, du moins pour $p_1 < 4$, les systèmes irréductibles subordonnés aux précédents. Ces systèmes seront eux-mêmes d'ordre minimum *quels que soient le nombre et la position des points-base simples*, sauf les cas où une restriction est explicitement formulée dans l'énoncé.

Moyennant ces conventions, les systèmes linéaires de courbes algébriques planes irréductibles de genre 4 sont crémoniennement réductibles aux types $|C|$ suivants, d'ordre minimum, ou à des types subordonnés.

1. — Systèmes de dimension ≥ 0 avec adjoint $|C_1|$ irréductible, simple et de genre $p_1 < 4$.

1. $p_1 = 0$, $D_1 = 2$. *a.* $C^6(2M^3)$, sans autres points-base; $r = 15$; $C_1^3(2M^1)$.
   b. $C^4(2M^2)$, contenu dans le précédent et de même adjoint; $r = 14$.

2. $p_1 = 1$, $D_1 = 3$. $C^6(6M^2)$; $r = 9$; $C_1^3(6M^1)$.

3. $p_1 = 2$, $D_1 = 4$; $p_2 = 0$, $D_2 = 0$. $C^7(M^3, 8N^2)$; $r = 5$; $C_1^4(M^2, 8N^1)$; $C_2^1(M^1)$. La cubique $G^3(M^1, 8N^1)$ est unique.

4. $p_1 = 3$, $D_1 = 5$; $p_2 = 0$, $D_2 = 1$. $C^7(11M^2)$; $r = 2$; $C_1^4(11M^1)$; C_2^1.

5. $p_1 = 3$, $D_1 = 5$; $p_2 = 1$, $D_2 = 2$. $C^9(7M^3, 3N^2)$; $r = 3$; $C_1^6(7M^2, 3N^1)$; $C_2^3(7M^1)$.

6. $p_1 = 3$, $D_1 = 5$; $p_2 = 0$, $D_2 = 0$.
   a. $C^8(M^4, 11N^2, 2Z^1, 2U^1)$; $r = 1$; $C_1^3(M^3, 11N^1)$; $C_2^2(M^2)$.
   Z_1 et Z_2 sont les deux points de $C^4(M^2, 11N^1)$, irréductible et de genre 2, tels que les C_1 par Z_1 ou Z_2 recoupent au total C^4 suivant quatre points alignés par couples sur M. U_i est infiniment voisin de Z_i sur la droite MZ_i $(i = 1, 2)$.
   b. $C^8(M^4, 11N^2)$; $r = 2$; mêmes adjoints que *a*. N'existe que pour certaines positions des points-base. Quand $C^4(M^2, 11N^1)$ est irréductible et de genre 2, il faut que $10N_i$ $(i = 2, 3, \ldots, 11)$ forment l'intersection de $C^4(M^2, N_1^1)$ avec une quintique $C^5(M^2)$ qui touche C^4 en N_1 et passe par deux points A, B de C^4 tels que la conique menée par M, A, B et tangente à C^4 en N_1 rencontre ultérieurement C^4 en deux points situés sur la droite qui joint les dernières intersections de C^4 avec MA, MB. Il existe des configurations particulières réductibles à des types plus simples (*cf.* n° 11).

7. $p_1 = 3$, $D_1 = 4$; $p_2 = 1$, $D_2 = 2$. $C^9(7M^3, 3N^2)$; $r = 4$; $C_1^6(7M^2, 3N^1, P^1)$; $C_2^3(7M^1)$. $|C_1|$ admet la cubique fondamentale $G^3(7M^1, 3N^1, P^1)$ pour laquelle P est effectivement simple; P est uni pour l'involution de Geiser J définie par $|C_2|$. Suivant les cas, 1, 2 ou 4 points-base simples de $|C_1|$ peuvent jouer le rôle de P. Néanmoins (*cf.* le type 13 ci-après), le groupe des $3N_i$ ne renferme aucun couple de J.

8. $p_1=3$, $D_1=4$; $p_2=2$, $D_2=2$; $p_3=1$, $D_3=0$. $C^{12}(8M^4, N^3, P_4^1)$; $r=4$; $C_1^9(8M^3, N^2, P_3^1)$; $C_2^6(8M^2, N^1, P_2^1)$: $C_3^3(8M^1, N^0, P_1^1)$. Il existe une courbe $G^3(8M^1, N^1, 4P^1)$ fondamentale pour $|C|$ et ses adjoints, mais (*cf.* le type 11 ci-dessous) N n'est pas uni pour l'involution de Bertini de points fondamentaux $8M_i$.

II. — Systèmes infinis avec adjoint $|C_1|$ non simple et de genre $p_1<4$.

A. — $|C_1|$ *est composé au moyen d'une involution* J *du* 2^e *ordre.*

9. $p_1=2$, $D_1=4$; $p_2=0$, $D_2=0$. $C^7(M^3, 8N^2)$; $r=5$; $C_1^4(M^2, 8N^1)$; $C_2^1(M^1)$. Il doit exister un faisceau elliptique $E^3(M^1, 8N^1)$. C appartient, comme C_1 et C_2, à l'involution des intersections libres des courbes E^3 et C_2.

10. $p_1=2$, $D_1=4$; $p_2=1$, $D_2=0$. $C^9(8M^3)$; $r=6$; $C_1^6(8M^2)$; $C_2^3(8M^1, N^1)$. $|C|$ contient un système $C^7(8M^3, N^1)$, de dimension 5, composé au moyen de l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8M_i$.

11. $p_1=3$, $D_1=4$; $p_2=2$, $D_2=2$; $p_3=1$, $D_3=0$. *a.* $C^{12}(8M^4, N^3, N_1^1)$; $r=4$.

b. $C^{12}(8M^4, N^2, U^2, P^2)$; $r=3$.

Ces deux systèmes admettent la même suite d'adjoints $C_1^9(8M^3, N^2, P^1)$, $C_2^6(8M^2, N^1, N_1^1)$, $C_3^3(8M^1, P^1)$. Il faut qu'existent les faisceaux de courbes elliptiques $H^6(8M^2, N^2)$ et $E^3(8M^1, P^1)$, que N_1 soit infiniment voisin de N sur $G^3(8M^1, N^1, P^1)$ et que U soit infiniment voisin de N sur la courbe unie de l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8M_i$. Ces systèmes et leurs adjoints sont composés au moyen de J. Le système *a.* est un cas limite du type 8, pour lequel les courbes C deviennent hyperelliptiques (1).

12. $p_1=3$, $D_1=4$; $p_2=2$, $D_2=2$; $p_3=0$, $D_3=0$. $C^{10}(M^4, 8N^3, 2P^2)$; $r=3$; $C_1^7(M^3, 8N^2, P_1^2)$; $C_2^4(M^2, 8N^1, P_1^1, Q^1)$; $C_3^1(M^1)$, avec faisceau de cubiques elliptiques $E^3(M^1, 8N^1)$, P_1 uni pour l'involution J des couples de E alignés sur M, P_2 infiniment voisin de P_1 sur la courbe unie de J et Q infiniment voisin de P_1 sur MP_1. $|C|$ et ses adjoints sont composés au moyen de J.

13. $p_1=3$, $D_1=4$; $p_2=1$, $D_2=2$. $C^9(7M^3, 2N^2, P_1^2)$; $r=4$; $C_1^6(7M^2, 2N^1, P_1^1, P_2^1)$; $C_2^3(7M^1)$. Les $2N_i$ et les $2P_j$ forment deux couples de l'involution de Geiser J engendrée par $|C_2|$; le couple $2P_j$ forme une coïncidence de J. $|C|$ et ses adjoints sont composés au moyen de J. Si le couple $2N_i$ (à distance finie de P_1P_2) forme à son tour une coïncidence de J, les rôles des deux couples sont permutables et il existe deux systèmes du type de $|C|$ et d'adjoint $|C_1|$.

---

(1) L'invariant (C, C^2), nombre des intersections variables des courbes C et C^2, permet de différencier les types 8, 11 *a* et 11 *b*, pour lesquels il prend respectivement les valeurs 5, 4 et 8.

14. $p_1=3$, $D_1=1$; $p_2=0$, $D_2=0$.

a. $C^9(M^5,\ 12P^2,\ 2X^2)$; $r=1$; $C_1^5(M^3,\ 12P^1)$; $C_2^2(M^2)$.

Les $2X_i$ sont alignés sur M et unis pour l'involution J des couples communs aux droites issues de M et aux courbes du faisceau $H^4(M^2,\ 12P^1)$. $|C|$ et ses adjoints sont composés au moyen de J.

b. $C^8(M^5,\ 11P^2)$; $r=3$; mêmes adjoints que *a*. Ce système n'existe que si P_{11}, P_{12} sont infiniment voisins et alignés sur M (ou se succèdent sur une branche dont la tangente passe en M): il est composé au moyen de J. Si plusieurs couples de P_i présentent la disposition de P_{11}, P_{12}, il existe autant de systèmes du type de $|C|$ et de même adjoint $|C_1|$.

15. $p_1=3$, $D_1=1$; $p_2=0$, $D_2=0$.

a. $C^{10}(M^6,\ N^3,\ 11P^2)$; $r=3$; $C_1^6(M^4,\ N^2,\ 12P^1)$; $C_2^3(M^2)$.

N est dans le domaine du premier ordre de M et les $12P_i$ se succèdent sur une branche linéaire inflexionnelle issue de M; $|C|$ et ses adjoints sont composés au moyen de l'involution J des couples communs aux droites par M et aux quintiques du faisceau $H^5(M^3,\ N^2,\ 12P^1)$. Les systèmes subordonnés à $|C|$ ne sont d'ordre minimum que si les couples de points-base simples sont infiniment voisins à P_{11} (et différents de P_{12}); sinon, ils sont réductibles à *b.*, ci-après.

b. $C^9(M^5,\ N^3,\ 11P^2,\ N_1^1)$, contenu dans le précédent et de mêmes adjoints; $r=2$. N^1 est proche de N sur la quartique isolée $H^3(M^2,\ N^1,\ 12P^1)$. $|C|$ se différencie encore du type **14** *a.* par l'invariant r^2, dimension de l'adjoint $|C^2|$: pour le type **14** *a.*, $r^2=3$; pour le type **15**, $r^2=2$.

B. — C_1 *composé au moyen d'un faisceau de courbes rationnelles :*

$$p_1=0,\qquad D_1=0,\qquad r=17.$$

16.

a. $C^6(M^5)$.

b. $C^7(M^5,N^2)$, sans points-base simples si N est distinct de M; si N est au contraire proche de M, les points-base simples imposés sont infiniment voisins de M sur des branches non tangentes à MN, et répartis à raison de $2t$ points au plus par branche d'ordre $t\leq 3$, excepté si la branche est linéaire inflexionnelle.

c. $C^8(M^6,\ 2N^2)$, avec les $2N_i$ dans le domaine du premier ordre de M. Les points-base simples imposés doivent être infiniment voisins de M sur des branches non tangentes aux MN_i, et répartis à raison de $2t$ points au plus par branche d'ordre $t\leq 2$, excepté si la branche est linéaire inflexionnelle.

d. $C^9(M^7,\ 3N^2)$, avec les $3N_i$ dans le domaine du premier ordre de M. Les points-base simples imposés sont infiniment voisins de M sur une branche linéaire non tangente aux MN_i et inflexionnelle s'il existe plus de deux points-base simples.

e. $C^{10}(M^8,\ 4N^2)$, avec les $4N_i$ dans le domaine du premier ordre de M, et sans points-base simples.

III. — Systèmes $|C|$ de dimension 3 avec adjoint de genre $p_1 \geqq 4$.

$|C|$ est de degré 4, composé en même temps que $|C_1|$ au moyen d'une involution J du second ordre, et admet un faisceau $|E|$ de bisécantes de genre 1 ou 2.

A. — $|E|$ *est elliptique : tous les adjoints de* $|C|$ *sont composés au moyen de l'involution* J.

17. $p_1=4, D_1=4$; $p_2=3, D_2=4$; $p_3=2, D_3=2$; $p_4=1, D_4=0$. — $C^{12}(8M^3, N^3, P^2, Q^1)$; $C_1^{12}(8M^3, N^3, N_1^3, P^1, P_1^1)$; $C_2^9(8M^3, N^3, Q^1)$; $C_3^6(8M^2, N^1, N_1^1)$; $C_4^3(8M^1, Q^1)$; $E^6(8M^2, N^2)$. $8M_i$ et Q forment la base d'un faisceau $|C_3|$ de cubiques elliptiques; N et P sont deux points, distincts de Q, unis pour l'involution J de Bertini de points fondamentaux $8M_i$; N_1 et P_1 leurs conjugués dans J.

18. $p_1=4, D_1=4$; $p_2=2, D_2=4$; $p_3=0, D_3=0$. — $C^{10}(M^4, 8N^3, 2P^2)$; $C_1^7(M^3, 8N^2, 2P^1, 2\overline{P}^1)$; $C_2^4(M^2, 8N^1)$; $C_3^1(M^1)$; $E^2(M^1, 8N^1)$. Les $2P_i$ sont distincts et unis pour l'involution J des couples de E alignés sur M; les $\overline{P}_i$ sont conjugués aux P_i dans J.

19. $p_1=4, D_1=4$; $p_2=2, D_2=4$; $p_3=1, D_3=0$. — $C^{12}(8M^4, N^2, 2P^2)$; $C_1^9(8M^3, N^1, 2P^1, 2\overline{P}^1)$; $C_2^6(8M^2)$; $C_3^3(8M^1, N^1)$; $E^2(8M^1, N^1)$. Les $2P_i$ sont distincts et unis pour l'involution J de Bertini engendrée par $|C_2|$.

B. — $|E|$ *est de genre* 2 : $|C_1| = |E + E_1|$, $|E_1|$ *formé de quadrisécantes à* $|C|$.

20. $p_1=5, D_1=4$; $p_2=5, D_2=8$; $p_3=4, D_3=7$; $p_4=3, D_4=4$; $p_5=1, D_5=0$. — $C^{18}(8M^6, 2N^5)$; $C_1^{15}(8M^5, 2N^3, 2\overline{N}^3, P^1)$; $C_2^{12}(8M^4, 2N^2)$; $C_3^9(8M^3, 2N^1)$; $C_4^6(8M^2)$; $C_5^3(8M^1, P^1)$; $E^9(8M^3, 2N^2, P^1)$; $E_1^6(8M^2, 2N^1, 2\overline{N}^1)$; $|E_2| = |C_5|$. Les $8M_i$ et P forment la base d'un faisceau $|C_3|$ de cubiques elliptiques; les $2N_i$ sont distincts et situés sur la courbe unie de l'involution J de Bertini engendrée par $|C_1|$; les $2\overline{N}_i$ sont les conjugués dans cette involution des $2N_i$. Le seul adjoint de $|C|$ non composé au moyen de J est $|C_3|$, qui est simple.

21. $p_1=4, D_1=4$; $p_2=2, D_2=4$; $p_3=1, D_3=0$. — $C^{12}(8M^4, 2N^2, P^2)$; $C_1^9(8M^3, 2N^1, P^1, \overline{P}^1, Q^1)$; $C_2^6(8M^2)$; $C_3^3(8M^1, Q^1)$; $E^6(8M^2, 2N^1, P^1, \overline{P}^1)$; $|E_1| = |C_3|$. P est un point de la courbe unie de l'involution J engendrée par $|C_2|$; les $2N_i$ forment un couple de J; Q est le point uni isolé et $\overline{P}$ est le conjugué de P. $|C|$ et ses adjoints sont composés au moyen de J (1).

22. $p_1=4, D_1=4$; $p_2=4, D_2=4$; $p_3=3, D_3=4$; $p_4=2, D_4=2$; $p_5=1, D_5=0$. — $C^{18}(8M^6, 2N^5)$; $C_1^{13}(8M^5, N_1^3, N_2^3, P^1)$ est un cas particulier du système 17. Les $2N_i$ sont infiniment voisins sur la courbe unie de l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8M_i$; P est le point uni isolé de J. $|C|$ et tous ses adjoints sont composés au moyen de J. $E^9(8M^3, 2N^2, P^1)$; $E_1^6(8M^2, N_1^2)$.

---

(1) Les types 19 et 21 se différencient par les valeurs que prend l'invariant crémonien $(C_1 C_3)$, nombre des intersections variables des courbes C avec les adjointes C_3, soient deux pour le type 19 et quatre pour le type 21.

BIBLIOGRAPHIE.

[J] F. JONGMANS, *Les variétés algébriques à courbes-sections de genre 4* (*Mém. Acad. roy. de Belgique*, in-8°, 1944).

[N] L. NOLLET, *Recherches sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes* (*Mém. Soc. roy. Sc. de Liége*, t. 7, 1947, p. 469-555).

[I] G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 4, 1890; *Memorie scelte*, XII).

[II] *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* (*Atti R. Accad. Sc. Torino*, vol. XXV. 1890; *Memorie scelte*, XIII).

[III] F. CONFORTO, *Le superficie razionali*, Bologna, N. Zanichelli, 1939.

[IV] M. DE FRANCHIS, *Riduzione dei fasci di curve di genere 2. Riduzione dei sistemi lineari ∞^k di curve piane di genere 3, per $k > 1$* (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 13, 1899).

[V] G. JUNG, *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque* (*Annali di Mat.*, sér. 2, t. 15 et 16, 1887-1889).

[VI] JONGMANS et NOLLET, *Un théorème sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes à système adjoint réductible* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, sér. 5, t. 34, 1948, p. 617-625).

[VII] *Contribution à la classification des faisceaux de courbes algébriques planes de genre 2* (*Bull. sc. mathém.*, 1948).

[VIII] L. NOLLET, *Sur le système adjoint à un système linéaire de courbes planes appartenant à une involution* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, sér. 5, t. 33, 1947, p. 556-562).

LES

POINTS UNIS DES INVOLUTIONS CYCLIQUES APPARTENANT A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Nous avons déjà consacré plusieurs travaux à la recherche de la structure des points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et à celle de la structure des points de diramation correspondants d'une surface image d'une de ces involutions (1). Dans ce Mémoire nous exposons une méthode permettant de résoudre, dans chaque cas, les problèmes dont il vient d'être question.

Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier impair p. Considérons un point uni A de cette involution, isolé, simple pour la surface. Dans le domaine du premier ordre de A sur F, l'involution détermine soit l'identité, soit une homographie d'ordre p.

Dans le premier cas, le point A est appelé point uni parfait, dans le second, point uni non parfait. Pour étudier ces points, nous commençons par construire sur F un système linéaire complet $|C|$, contenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, c'est-à-dire p systèmes dont les courbes se rencontrent suivant des groupes de l'involution. L'un de ces systèmes partiels $|C_0|$, est dépourvu de points-base et en rapportant projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace linéaire de dimension convenable, on obtient une surface Φ image de l'involution, c'est-à-dire une surface dont chaque point corres-

(1) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* (*Bull. Soc. Math. de France*, 1919, p. 1-16); *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient.*, n° 270, Paris, Hermann, 1935); *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Mémoires* in 8° *de l'Académie Roy. de Belgique*, 1938, p. 1-44); *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1938, p. 193-222); *Sur les points de diramation des surfaces multiples* (*Bull. de la Soc. Roy. des Sciences de Liége*, 1940, p. 54-79, 128-137.

pond à un groupe de l'involution. Au point uni A correspond sur Φ un point de diramation A'.

Lorsque le point A est uni parfait, les courbes C_0 passant par A acquièrent en ce point la multiplicité p, les tangentes étant variables. Il est facile de voir que le point de diramation correspondant A' est multiple d'ordre p pour la surface Φ, le cône tangent étant rationnel et irréductible.

Lorsque le point A est uni non parfait, nous construisons une suite de systèmes linéaires $|C_0'|$, $|C_0''|$, ... compris dans $|C_0|$ ayant en A des multiplicités croissantes, inférieures à p et des tangentes en A confondues avec deux droites, unies pour l'involution déterminée, dans le faisceau des tangentes à F en A, par l'involution donnée sur F. Le procédé employé conduit finalement à un système linéaire dont les courbes ont en A un point multiple d'ordre p, à tangentes variables. Déterminer la structure du point A revient à déterminer les différentes branches d'origine A, appartenant aux courbes C_0', C_0'', ... On en déduit alors la structure du point de diramation A', c'est-à-dire sa multiplicité pour la surface Φ et la configuration formée par les cônes tangents à cette surface en ce point.

Il nous a paru utile, après avoir exposé la méthode générale, de l'appliquer à un cas particulier déterminé, de manière à montrer comment se fait cette application. C'est par là que se termine notre travail.

On trouvera, dans l'exposé cité plus haut (1), la bibliographie de la question jusqu'en 1935. Depuis, nous avons publié sur le même objet différentes Notes dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* et dans le *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*. M. S. Lilley a également consacré un Mémoire à la question qui nous occupe (2).

Un résumé du présent travail a été présenté récemment à l'Académie des Sciences (3).

Ajoutons que les involutions étudiées existent certainement. Il suffit de considérer le cas où F est un plan, l'involution étant engendrée par une homographie de période p non homologique. Nous avons indiqué récemment comment on pouvait construire d'autres exemples (4).

I. — Généralités.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier impair p. Nous désignerons par T la transformation biration-

(1) *Les involutions cycliques* (*loc. cit.*).

(2) *On the isolated united points of a cyclic involution on an algebric surface* (*Proceedings of the London Mathem. Society*, 1940, p. 312-360).

(3) *Structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*C. R. Acad. Sc.*, 2e sem. 1948, p. 173-175).

(4) *Sur la construction de modèles de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques* (*Bull. de la Soc. des Sciences de Liége*, 1948, p. 56-61).

nelle de F en soi, génératrice de l'involution I_p et nous supposerons que cette involution ne possède qu'un nombre fini de points unis. Un tel point, compté p fois, forme un groupe de l'involution. Nous supposerons en outre que les points unis de l'involution I_p sont des points simples de F.

Considérons un point uni A et soit C une courbe tracée sur F, passant simplement par A. La transformation T lui fait correspondre une courbe C′ passant également simplement par A. A la tangente a à C en A, faisons correspondre la tangente a' à C′ en A. Dans le faisceau de rayons de sommet A et dont le plan est le plan tangent α à F en A, nous obtenons ainsi une homographie qui est l'identité ou a la période p. Dans le premier cas, nous dirons que le point A est *uni parfait* ou de première espèce, dans le second, qu'il est *uni non parfait* ou de seconde espèce.

Transformons birationnellement F en une surface F′ de telle sorte qu'au point A corresponde sur F′ une courbe exceptionnelle a'_0. A l'involution I_p correspond sur F′ une involution I'_p et à la transformation T, une transformation birationnelle T′ de F′ en soi, de période p. La courbe a'_0 est transformée en elle-même par T′; si A est uni parfait, tous les points de a'_0 sont unis pour T′; si au contraire A est uni non parfait, T′ détermine sur la courbe rationnelle a'_0 une homographie cyclique d'ordre p. Cette homographie possède deux points unis A'_1, A'_2, qui sont des points unis de l'involution I'_p. Les points A'_1, A'_2 ont pour homologues sur F deux points A_1, A_2, infiniment voisins de A, unis pour l'involution I_p. Ces points sont situés sur les tangentes a_1, a_2 à F en A, unies pour l'homographie déterminée dans le faisceau des tangentes; une courbe C touchant en A la droite a_1 ou a_2, a pour transformée une courbe C′ tangente en A à la même droite.

2. Supposons que le point A soit uni de seconde espèce. Le point A'_1 par exemple est uni pour l'involution I'_p et nous pouvons reprendre, pour ce point, les développements faits pour A. Suivant que le point A'_1 est uni parfait ou non parfait pour l'involution I'_p, nous dirons que le point A_1 est uni parfait ou non parfait pour l'involution I_p.

Si le point A'_1 est uni non parfait pour I'_p, il possède deux points unis A'_{11}, A'_{12} infiniment voisins, unis pour l'involution. L'un de ces points est nécessairement situé sur la courbe a'_0. Aux points A'_{11}, A'_{12} correspondent, sur la surface F, des points A_{11}, A_{12} du domaine du second ordre du point A, infiniment voisins de A_1, que nous dirons être unis pour l'involution I_p.

Transformons birationnellement F′ en une surface F″ de telle sorte qu'au point A'_1 corresponde sur la surface F″ une courbe exceptionnelle a''_0. Soit T″ la transformation birationnelle de F″ en soi homologue de T′; elle engendre une involution I''_p. Si le point A'_1 est uni parfait pour I'_p, tous les points de a''_0 sont unis pour T″ et I''_p. Si le point A'_1 est uni non parfait pour I'_p, aux points A'_{11}, A'_{12} correspondent sur F″ deux points A''_{11}, A''_{12}, appartenant à a''_0, unis pour I''_p. On

peut reprendre pour ces points les développements précédents et retourner ensuite à la surface F, et ainsi de suite.

On voit que si le point A est uni non parfait, il est l'origine d'une sorte d'arbre dont les branches sont constituées par des points infiniment voisins successifs, unis pour I_p, chaque branche pouvant se terminer par un point uni parfait pour cette involution. Chaque point uni non parfait du domaine de A, a deux points unis infiniment voisins.

3. Pour poursuivre l'étude des points unis de l'involution I_p, nous allons construire un modèle projectif de la surface F.

Considérons sur F un système linéaire $|H_1|$, simple, irréductible, dépourvu de points-base. Soient $|H_2|$, $|H_3|$, ..., $|H_p|$ les systèmes linéaires que T, T^2, ..., T^{p-1} lui font correspondre. Le système linéaire complet

$$|C| = |H_1 + H_2 + \ldots + H_p|$$

est irréductible et dépourvu de points-base. De plus, il est transformé en lui-même par T.

Deux cas peuvent se présenter suivant que toute courbe de $|C|$ est transformée en elle-même par T ou bien qu'une courbe de $|C|$ est transformée en général par T en une autre courbe de $|C|$. Dans le premier cas, le système $|C|$ appartient à l'involution I_p; recommençons alors les opérations précédentes en prenant pour système $|H_1|$ le système $|C|$ lui-même. Nous obtenons ainsi le système linéaire complet $|pC|$. Si ce système appartenait encore à l'involution I_p, nous recommencerions l'opération précédente, et ainsi de suite. On parviendra finalement à un système linéaire transformé en lui-même par T et n'appartenant pas à l'involution I_p. Supposons en effet que les systèmes linéaires complets $|\lambda C|$ appartiennent tous à l'involution I_p, quel que soit l'entier positif λ. Les groupes de l'involution I_p appartenant à une courbe C irréductible déterminée, ne passant par aucun des points unis de l'involution, forment une série γ'_p; soient Γ une courbe image de cette série, π le genre de Γ. Les courbes λC découpent sur la courbe C envisagée une série linéaire composée au moyen de γ'_p et à laquelle correspond sur Γ une série linéaire. On peut prendre λ assez grand pour que la série considérée sur C soit complète et non spéciale. Soit pn l'ordre de cette série; la courbe C ayant, d'après la formule de Zeuthen, le genre $p(\pi-1)+1$, la série a la dimension $pn-p(\pi-1)-1$. Il lui correspond sur Γ une série d'ordre n, complète, non spéciale, de même dimension. Mais cette dimension est d'autre part $n-\pi$. On en conclut $p=1$.

On en conclut qu'il est toujours possible de déterminer sur F un système linéaire complet, irréductible, privé de points-base $|C|$, transformé en lui-même par T et n'appartenant pas à l'involution I_p.

4. Considérons un système linéaire complet $|C|$ répondant aux conditions précédentes et soit r sa dimension. Rapportons projectivement les courbes C

aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. A la surface F correspond point par point dans S_r une surface normale que nous continuerons à désigner par F. Sur ce modèle projectif de la surface F, la transformation T échange entre elles les sections hyperplanes et est par conséquent déterminée sur la surface par une homographie cyclique de période p de S_r; nous désignerons par T cette homographie.

L'homographie T possède un certain nombre t d'axes ponctuels que nous désignerons par $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{t-1}$. Soient $r_0, r_1, \ldots, r_{t-1}$ les dimensions de ces axes. On a, d'après la théorie des homographies cycliques,

$$r_0 + r_1 + \ldots + r_{t-1} + t = r + 1 \qquad (1 < t \leq p).$$

Désignons par Σ_i le système linéaire des hyperplans de S_r passant par les axes $\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{t-1}$. Les hyperplans de Σ_i sont unis pour T et découpent, sur F, un système linéaire partiel appartenant à l'involution I_p et que nous désignerons par $|C_i|$. Il existe donc, dans $|C|$, t systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{t-1}|$ appartenant à l'involution I_p.

Reprenons la formation du système $|C|$. Une courbe $H_1 + H_2 + \ldots + H_p$ est transformée en soi par T et appartient donc à l'un des systèmes $|C_0|$, $|C_1|, \ldots, |C_{t-1}|$. D'après les hypothèses faites, elle varie d'autre part dans un système linéaire dépourvu de points-base; par conséquent, l'un des systèmes $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{t-1}|$ est dépourvu de points-base; nous supposerons que c'est le système $|C_0|$. Mais alors, les axes ponctuels $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{t-1}$ de T ne peuvent rencontrer la surface F. Un point uni de l'involution I_p appartenant nécessairement à un axe ponctuel de l'homographie T, les points unis de I_p sont les points de rencontre de F et de l'axe ponctuel σ_0. Il en résulte que les systèmes linéaires $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{t-1}|$ ont pour points-base les points unis de l'involution I_p et seulement ces points.

5. Prenons comme sommets de la figure de référence dans S_r, $r_0 + 1$ points $o_0, o_1, \ldots, o_{r_0}$ indépendants de σ_0, $r_1 + 1$ points $o_{r_0+1}, \ldots, o_{r_0+r_1+1}$ points indépendants de $\sigma_1, \ldots, r_{t+1} + 1$ points indépendants de σ_{t-1}. Les équations de l'homographie T peuvent s'écrire

$$\rho x'_i = \rho_i x_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

les invariants projectifs ρ_i étant des racines d'ordre p de l'unité. Précisément, on pourra prendre

$$\begin{aligned}
&\rho_0 = \rho_1 = \ldots = \rho_{r_0} = 1,\\
&\rho_{r_0+1} = \ldots = \rho_{r_0+r_1+1} = \varepsilon_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\rho_{r_0+\ldots+r_{t-1}+t-1} = \ldots = \rho_r = \varepsilon_{t-1},
\end{aligned}$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{t-1}$ sont des racines primitives d'ordre p, distinctes, de l'unité.

Aux systèmes linéaires $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{t-1}|$, nous associerons les racines 1, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{t-1}$. On observera que si l'on écrit l'équation des hyperplans de Σ_i et si l'on applique l'homographie T, on obtient la même équation, le premier membre étant multiplié par ε_i.

Cela étant, considérons le système $|\lambda C|$, découpé sur F par les hypersurfaces, d'ordre λ, de S_r. Ce système contiendra $t'(t \leqq t' \leqq p)$ systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p. Pour les former, il suffira de considérer les courbes

$$\lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_{t-1} C_{t-1},$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{t-1}$ sont des entiers positifs dont la somme est λ. A ce système sera attachée la racine $\varepsilon_1^{\lambda_1} \varepsilon_2^{\lambda_2} \ldots \varepsilon_{t-1}^{\lambda_{t-1}}$. Il est clair que l'on pourra prendre λ assez grand pour obtenir toutes les racines primitives d'ordre p de l'unité. Dans ces conditions, le système $|\lambda C|$ contiendra p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p dont l'un, contenant les courbes λC_0, est dépourvu de points-base. Cela revient évidemment à dire que dans les développements précédents, on peut supposer $t = p$. Si ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, on pourra, en modifiant éventuellement la numérotation des axes ponctuels de T, prendre $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon^2$, ..., $\varepsilon_{p-1} = \varepsilon^{p-1}$.

En résumé, nous avons construit une surface normale F sur laquelle l'involution I_p est déterminée par une homographie cyclique T de l'espace ambiant S_r. L'homographie T possède p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ de dimensions $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$, dont le premier seul rencontre F, aux points unis de l'involution. Le système des sections hyperplanes $|C|$ de F contient p systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I_p; le premier est dépourvu de points-base; les autres ont pour points-base les points unis de I_p.

Aux systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ sont respectivement attachés les nombres $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}$, où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Les courbes C_i sont découpées sur F par les hyperplans d'une gerbe Σ_i ayant comme base les espaces $\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{p-1}$.

6. Rapportons projectivement les courbes du système $|C_0|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions. Aux courbes C_0 passant par un groupe de l'involution I_p correspondent les hyperplans passant par un point dont le lieu est une surface normale Φ, image de l'involution I_p. On peut d'ailleurs obtenir la surface Φ (à une homographie près) en projetant la surface F à partir de l'espace linéaire de dimension minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ sur l'espace σ_0.

Les sections hyperplanes de Φ seront désignées par Γ_0; elles ont pour transformées, dans la correspondance $(1, p)$ existant entre Φ et F, les courbes C_0.

Si n désigne l'ordre de Φ et π le genre des courbes Γ_0, les courbes C_0 et par suite les courbes C ont le degré pn et le genre $p(\pi - 1) + 1$.

Aux systèmes linéaires $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$ correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets que nous désignerons par $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$. Les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ sont d'ordre n, mais les degrés et les genres de ces courbes dépendent du comportement des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ aux points unis de l'involution I_p.

Aux points unis de I_p correspondent sur Φ les points de diramation ou de ramification de la correspondance $(1, p)$ existant entre Φ et F. Nous verrons que ces points sont singuliers pour la surface Φ_4.

7. Soient A un point uni de l'involution I_p, α le plan tangent à F en ce point. Le plan α est uni pour l'homographie T et nous supposerons qu'il ne rencontre l'espace σ_0 qu'au seul point A. Le plan α doit par conséquent s'appuyer suivant une droite sur l'un des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ ou rencontrer suivant un point deux de ces espaces.

Plaçons-nous dans le premier cas. L'homographie T détermine dans le plan α une homologie de centre A, c'est-à-dire l'identité dans le faisceau (A, α). Le point A est uni parfait.

Dans le second cas, l'homographie T détermine dans α une homographie non homologique et par conséquent, dans le faisceau (A, α), une homographie de période p. Le point A est uni non parfait.

Considérons le cas où A est uni parfait et soit A' le point de diramation qui lui correspond sur Φ. Les courbes C_0 passant par A sont découpées sur F par les hyperplans de Σ_0 passant par A et contenant par conséquent α; il en résulte que ces courbes, que nous désignerons par C'_0, ont un point au moins double en A, à tangentes variables. Soit k la multiplicité du point A pour les courbes C'_0. Sur une de ces courbes, il y a k groupes de I_p formés des k points infiniment voisins de A, comptés chacun p fois. Il en résulte que les courbes Γ'_0 qui correspondent sur Φ aux courbes C'_0 ont k points infiniment voisins de A'. En d'autres termes, les hyperplans passant par A' découpent sur Φ des courbes ayant la multiplicité k en A', donc ce point est multiple d'ordre k pour la surface.

Le système $|C'_0|$ a le degré $pn - k^2$, donc le système $|\Gamma'_0|$ a le degré $n - \frac{k^2}{p}$. Il en résulte que k est multiple de p.

Les courbes Γ'_0 ont le genre $\pi - (k-1)$ et les courbes C'_0, le genre $p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}k(k-1)$. Dans la correspondance $(1, p)$ existant entre deux courbes Γ'_0, C'_0 homologues, il y a k points de diramation. La formule de Zeuthen donne

$$2p(\pi - k) + k(p-1) = 2p(\pi - 1) - k(k-1).$$

On en conclut $k = p$.

Si A est un point uni parfait, les courbes C_0 passant par ce point y ont un point multiple d'ordre p à tangentes variables. Le point de diramation corres-

pondant sur Φ est multiple d'ordre p pour cette surface. Le cône tangent en ce point à Φ est d'ailleurs rationnel, car ses génératrices correspondent biunivoquement aux droites du faisceau (A, α).

8. Considérons maintenant un point uni non parfait A et soit encore A' le point de diramation qui lui correspond sur Φ. Le plan tangent α à F en A s'appuie en un point sur deux des axes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{p-1}$ et les droites qui projettent de A les points d'appui sont unies pour T. Appelons-les a_1 et a_2 et reprenons la construction du système $|C|$.

Si nous considérons les courbes H_1 tangentes à a_1 en A, les courbes H_2, $H_3, \ldots, H_p$ toucheront également a_1 en A. La courbe $H_1 + H_2 + \ldots + H_p$ aura en A un point multiple d'ordre p auquel sera infiniment voisin, sur a_1, un point multiple d'ordre p. Comme nous l'avons vu, ces courbes appartiennent au système $|C_0|$. Nous voyons donc que dans $|C_0|$, il existe un système linéaire partiel dont les courbes ont la multiplicité p en A, les p tangentes étant confondues avec a_1. Pour la même raison, il existe un système linéaire partiel de courbes C_0 ayant la multiplicité p en A, les p tangentes étant confondues avec a_2 Ces deux systèmes linéaires partiels appartiennent à un même système linéaire, que nous désignerons par $|C_0^{(\nu)}|$, dont les courbes ont en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

Sur une courbe $C_0^{(\nu)}$, l'involution I_p détermine une involution privée de points unis, les p points infiniment voisins de A forment un groupe de cette involution. Nous allons montrer que les courbes $C_0^{(\nu)}$ ne peuvent coïncider avec les courbes C_0' assujetties à la seule condition de passer par A. Supposons en effet qu'il en soit autrement. Aux courbes $C_0^{(\nu)}$ correspondent sur Φ des courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$ qui ont un point simple en A' et ce point est par conséquent simple pour la surface Φ. Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance entre deux courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$, $C_0^{(\nu)}$ homologues. Le genre de la dernière courbe étant

$$p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}p(p-1),$$

on a

$$2p(\pi - 1) = 2p(\pi - 1) - p(p-1),$$

d'où $p = 1$, ce qui est absurde.

On en conclut que les courbes C_0, assujetties à la seule condition de passer par A, ont en ce point une multiplicité inférieure à p. Cette multiplicité est d'autre part au moins égale à deux, car les hyperplans de Σ_0 découpant les courbes en question passent par A et contiennent le plan α. Les tangentes en A à ces courbes sont d'autre part unies pour T et sont donc confondues avec les droites a_1, a_2.

II. — Structure des points unis.

9. Soit A un point uni de seconde espèce. Nous pouvons toujours supposer, en changeant éventuellement de notation, que l'un des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ sur lesquels le plan tangent α à F en A s'appuie en un point est σ_1. Nous supposerons que α s'appuie en outre en un point sur $\sigma_k (1 < k \leq p-1)$. Soient a_1, a_k les droites projetant de A les points d'appui de α sur σ_1, σ_k.

Les hyperplans de Σ_1 coupent le plan α suivant la droite a_k, par conséquent les courbes C_1 ont un point simple en A et y touchent la droite a_k. De même, les hyperplans Σ_k coupent α suivant la droite a_1 et les courbes C_k passent simplement par A en y touchant la droite a_1.

Appelons C_0' les courbes C_0 assujetties à la seule condition de passer par A. Elles ont en ce point une certaine multiplicité $\rho_1 (2 \leq \rho_1 < p)$, les tangentes étant confondues avec a_1 et a_k. Le système $|C_0'|$ a la dimension $r_0 - 1$.

Appelons C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en A une droite du plan α distincte de a_1, a_k. Elles forment un système linéaire $|C_0''|$ de dimension $r_0 - 2$ et ont en A une multiplicité $\rho_2 (\rho_1 < \rho_2 \leq p)$.

Si $\rho_2 < p$, les tangentes en A aux courbes C_0'' sont confondues avec a_1 et a_k. Nous appellerons C_0''' les courbes C_0'' assujetties à toucher en A une droite du plan α distincte de a_1, a_k. Et ainsi de suite.

Nous formerons ainsi une suite de systèmes linéaires

$$|C_0'|, \quad |C_0''|, \quad \ldots, \quad |C_0^{(\nu-1)}|,$$

de dimensions $r_0 - 1$, $r_0 - 2$, $\ldots$, $r_0 - \nu + 1$, dont les courbes ont en A des multiplicités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\nu-1}$ telles que

$$2 \leq \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_{\nu-1} < p,$$

les tangentes en A étant confondues avec a_1 et a_k.

Les courbes $C_0^{(\nu-1)}$ assujetties à toucher en A une droite de α distincte de a_1, a_k, forment un système linéaire de dimension $r_0 - \nu$ et ont en A la multiplicité p. Elles coïncident nécessairement avec les courbes $C_0^{(\nu)}$ rencontrées plus haut et leurs tangentes en A sont variables.

10. Les systèmes $|C_0'|, |C_0''|, \ldots, |C_0^{(\nu)}|$ appartiennent évidemment à l'involution I_p et n'ont que A comme point-base. Il en résulte qu'en dehors de A, les courbes C_1, C_k doivent rencontrer les courbes de ces systèmes en des groupes de I_p. Par conséquent, le nombre des points d'intersection de chacune des courbes C_1, C_k avec les courbes C_0', C_0'', ... absorbés en A, doit être multiple de p.

Soient $\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_\nu'$ les nombres de points d'intersection absorbés en A de C_1 avec C_0', C_0'', $\ldots$, $C_0^{(\nu)}$. On a

$$1 < \rho_1' \leq \rho_2' \leq \ldots \leq \rho_\nu'.$$

Or, on a $\rho'_\nu = p$. On en conclut

$$\rho'_1 = \rho'_2 = \ldots = \rho'_\nu = p.$$

Ainsi, les courbes C_i rencontrent chacune des courbes C'_0, C''_0, ..., $C_0^{(\nu-1)}$ en p points confondus en A. Comme on a $\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_{\nu-1} < p$, on en conclut également que ces dernières courbes ont effectivement a_k comme tangente au point A.

De même, les courbes C_k rencontrent chacune des courbes C'_0, C''_0, ..., $C_0^{(\nu-1)}$ en p points confondus en A et ces dernières courbes ont effectivement a_i comme tangente au point A.

11. Fixons l'attention sur le système ${}_1C'_0{}_1$, $(1 \leq i < \nu)$. Les courbes C'_0 ont la multiplicité ρ_i en A; nous supposerons qu'elles ont ρ_{i1} tangentes en A confondues avec a_1 et $\rho_{ik} = \rho_i - \rho_{i1}$ tangentes confondues avec a_k. Désignons par A_1, A_k les points de F infiniment voisins de A situés respectivement sur a_1, a_k et soient $\rho'_{i1} \leq \rho_{i1}$, $\rho'_{ik} \leq \rho_{ik}$ leurs multiplicités pour les courbes $C_0^{(i)}$.

Considérons un hyperplan S_{r-1} de Σ_0 ne passant pas par A et projetons la surface F à partir de A sur cet hyperplan. Nous obtenons une surface F', d'ordre $pn - 1$, transformée en soi par T. Aux points A_1, A_k correspondent respectivement un point A'_1 de σ_1 et un point A'_k de σ_k. Au domaine du premier ordre du point A sur F correspond sur F' la droite $A'_1 A'_k$.

Aux courbes C'_0 correspondent sur F' des courbes d'ordre $pn - \rho_i$, que nous continuerons à désigner par le même symbole. Sur F', les courbes C'_0 ont les multiplicités ρ'_{i1} en A'_1 et ρ'_{ik} en A'_k, mais la droite $A'_1 A'_k$ doit rencontrer ces courbes en ρ_{i1} points confondus en A'_1 et en ρ_{ik} points confondus en A'_k.

Sur F', l'homographie T engendre une involution I'_p, projection de I_p et les points A'_1, A'_k sont unis pour I'_p.

Supposons en premier lieu que le point A'_1 soit uni parfait pour l'involution I_p. Alors, le point A'_1 est uni parfait pour I'_p. Sur F', les courbes C'_0 ont des tangentes variables en A'_1 et l'on a nécessairement $\rho'_{i1} = \rho_{i1}$. De plus, comme les courbes C_k doivent rencontrer les courbes $C_0^{(i)}$ en p points confondus en A, on a nécessairement $\rho_i + \rho_{i1} = p$.

Supposons maintenant que A_1 soit uni non parfait pour I_p. Le point A'_1 est uni non parfait pour I'_p et le plan tangent α'_1 à F' en A'_1, qui contient la droite $A'_1 A'_k$ et s'appuie donc en un point A'_k sur σ_k, s'appuie en outre en un point sur un autre axe ponctuel de l'homographie T, distinct de σ_1. Si ρ'_{i1} est inférieur à ρ_{i1}, les courbes C'_0 sur F' ont en commun un certain nombre de points infiniment voisins successifs, fixes, unis pour I'_p, situés sur la droite $A'_1 A'_k$.

Pour préciser ce point, observons que A_1 étant uni non parfait pour I_p, il existe deux points A_{11}, A_{12}, infiniment voisins de A_1 dans des directions différentes, unis pour I_p. A ces points correspondent sur F' des points A'_{11}, A'_{12}, unis

pour I'_p, infiniment voisins de A'_1 dont l'un, par exemple A'_{11}, est situé sur la droite $A'_1A'_k$. Si ρ''_{i1} est le nombre des tangentes aux courbes $C_0^{(i)}$ sur F'', confondues avec la droite $A'_1A'_{12}$, la multiplicité du point A'_{11} pour ces courbes est au plus égale aux nombres $\rho_{i1} - \rho'_{i1}$, $\rho'_{i1} - \rho''_{i1}$.

On peut poursuivre l'examen du point A'_1 en répétant l'opération précédente. Considérons un hyperplan de Σ_1 ne passant pas par A'_1; il coupe l'espace S_{r-1} suivant un espace S_{r-2}. Projetons la surface F' de A'_1 sur cet espace S_{r-2}; nous obtenons une surface F'', transformée en elle-même par l'homographie T. Au domaine de A'_1 sur F' correspondra sur F'' une droite s'appuyant en A'_k sur σ_k et en un point correspondant à A'_{12}, situé sur un axe ponctuel de T distinct de σ_1, σ_k. Il faudra étudier les multiplicités de ces deux points unis pour les courbes correspondant, sur F'', aux courbes $C_0^{(i)}$.

De ce qui précède, on conclut que sur une courbe $C_0^{(i)}$, le point A est l'origine d'un certain nombre de branches. Sur chacune de ces branches, il existe un certain nombre de points infiniment voisins successifs, unis pour I_p, communs à toutes les courbes $C_0^{(i)}$.

Le degré du système C'_0 est inférieur à pn, donc le nombre de points d'intersection de deux courbes $C_0^{(i)}$ absorbés en A est fini (et d'ailleurs multiple de p). Il en résulte que le nombre de points unis pour I_p, infiniment voisins successifs de A, communs aux courbes $C_0^{(i)}$, est fini.

Considérons une suite de points infiniment voisins successifs, unis pour I_p, communs aux courbes $C_0^{(i)}$ et soit P le point qui termine cette suite. Dans le domaine du premier ordre de P, les points situés sur une courbe C'_0 sont échangés entre eux par T et d'autre part, ils sont variables avec la courbe. Comme la multiplicité de P pour les courbes C_0 est inférieure à p, les points en question doivent être unis pour I_p. En d'autres termes, P est un point uni parfait pour I_p.

Chaque suite de points infiniment voisins successifs, unis pour I_p, communs aux courbes $C_0^{(i)}$, se termine par un point uni parfait.

12. Soit A' le point de diramation de Φ qui correspond au point A. Aux courbes C'_0 correspondent, sur Φ, les sections Γ'_0 de cette surface par les hyperplans passant par A'.

Les courbes C'_0 ont en commun un certain nombre de suites de points infiniment voisins successifs de A, terminées par des points unis parfaits de I_p. Soient $P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1\tau_1}$ les points unis parfaits qui terminent les suites comprenant le point infiniment voisin de A sur a_1 et $\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{1\tau_1}$ leurs multiplicités pour les courbes C'_0. Soient $P_{k1}, P_{k2}, \ldots, P_{k\tau_k}$ les points unis parfaits qui terminent les suites comprenant le point infiniment voisin de A sur a_k et $\tau_{k1}, \tau_{k2}, \ldots, \tau_{k\tau_k}$ leurs multiplicités pour les courbes C'_0.

Rapportons projectivement les courbes C'_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0 - 1$ dimensions. Il correspond à F une surface Φ_1, image de l'invo-

lution I_p, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ'_0. Cette surface est projectivement identique à la projection, à partir de A', de la surface Φ sur un hyperplan de l'espace ambiant.

Aux points de F infiniment voisins du point P_{11} correspondent sur Φ les points d'une courbe γ_{11}, rationnelle, d'ordre τ_{11}. De même aux domaines des points $P_{12}, \ldots, P_{1\tau_1}, P_{k1}, P_{k2}, \ldots, P_{k\zeta}$ sur F correspondent sur Φ des courbes rationnelles $\gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1\tau_1}, \gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$, respectivement d'ordres $\tau_{12}, \ldots, \tau_{1\tau_1}, \tau_{k1}, \tau_{k2}, \ldots, \tau_{k\zeta}$.

Les $\eta + \zeta$ courbes $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$ représentent le domaine du point A' sur la surface Φ_1. En d'autres termes, si Φ_1 est la projection de Φ à partir de A', le cône tangent à Φ en A' sera l'ensemble des cônes projetant de A' les différentes courbes $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$. Le point A' est donc multiple d'ordre

$$\tau_{11} + \tau_{12} + \ldots + \tau_{1\tau_1} + \tau_{k1} + \tau_{k2} + \ldots + \tau_{k\zeta}$$

pour la surface Φ.

Observons qu'aux courbes C_1 correspondent sur Φ des courbes Γ_1 passant par A', par conséquent, aux courbes Γ_1 correspondent sur Φ_1 des courbes, que nous désignerons toujours par Γ_1, rencontrant l'une des courbes $\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$, par exemple la première γ_{k1}. Les courbes C_1 passent donc par le point P_{k1} ; cela signifie que les courbes C_1 passent par la suite des points infiniment voisins de A qui aboutit à P_{k1}. La somme des multiplicités de ces points et de celle du point A pour les courbes C'_0 doit donc être égale à p.

De même, aux courbes C_k correspondent sur Φ des courbes Γ_k rencontrant en un point l'une des courbes $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1\tau_1}$, par exemple la première γ_{11}. Les courbes C_k passent par la suite de points infiniment voisins successifs de A communs aux courbes C'_0, qui aboutit au point P_{11}. La somme des multiplicités de A et des points de cette suite pour les courbes C'_0 est égale à p.

13. Aux courbes C''_0 correspondent sur la surface Φ des courbes que nous désignerons par Γ''_0. Sur la surface Φ_1, les courbes Γ''_0 sont découpées par les hyperplans passant par un point A'_1 de cette surface.

Rapportons projectivement les courbes C''_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0 - 2$ dimensions; il correspond à la surface F une surface Φ_2, image de l'involution I_p, projectivement identique à la surface que l'on obtiendrait en projetant Φ_1 du point A'_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant. Le point A'_1 peut appartenir à des courbes $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$, mais, à priori, il peut être quelconque. Dans ce dernier cas, les courbes C''_0 passent par les points $P_{11}, \ldots, P_k$ avec les mêmes multiplicités que les courbes C'_0.

On peut recommencer, pour déterminer la multiplicité du point A'_1 pour la surface Φ_1, les mêmes raisonnements qui ont été faits plus haut; nous ne le ferons pas, cela n'étant pas nécessaire pour notre objet. Notons que le point A'_1 peut être simple pour la surface Φ_1.

Aux courbes $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$ correspondent sur la surface Φ_2 des courbes que nous continuerons à désigner par le même symbole. Observons que si la courbe γ_{11}, par exemple, est une droite et si le point A'_1 appartient à cette droite, sur la surface Φ_2, la courbe γ_{11} se réduira au domaine d'un point multiple de cette surface.

D'une manière générale, désignons par $\Gamma_0^{(i)}$ les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes $C_0^{(i)}$. Nous pourrons construire une surface Φ_i, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(i)}$. Sur cette surface, les courbes $\Gamma_0^{(i+1)}$ seront découpées par les hyperplans passant par un point A'_i de la surface. Nous construisons ainsi une suite de surfaces

$$\Phi, \quad \Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_\nu,$$

dont chacune est projectivement identique à la projection de la précédente à partir d'un point sur un hyperplan de l'espace ambiant.

En général, nous désignerons par le même symbole les courbes et les points qui se correspondent sur ces différentes surfaces. On pourra par exemple dire, dans ces conditions, que Φ_i est projectivement identique à la projection, à partir de points $A', A'_1, \ldots, A'_{i-1}$, de la surface Φ sur un espace linéaire à $r_0 - i$ dimensions ne passant pas par ces points.

Fixons l'attention sur la surface Φ_ν. Les courbes $C_0^{(\nu)}$ ont en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables, donc $|C_0^{(\nu)}|$ a le degré $pn - p^2$ et la surface Φ_ν a l'ordre $n - p$.

Les p points d'une courbe $C_0^{(\nu)}$ infiniment voisins de A forment un groupe de I_p. A ces groupes de I_p correspondent, sur Φ_ν, les points d'une droite γ_0. Dans la correspondance $(1, p)$ existent entre deux courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$ et $C_0^{(\nu)}$ homologues, il n'existe pas de diramation; par conséquent, d'après la formule de Zeuthen, les courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$ ont le genre $\pi - \frac{1}{2}(p-1)$.

Les courbes $C_0^{(\nu)}$ ne passent pas par les points $P_{11}, \ldots, P_{k\zeta}$, ni d'une manière générale, par les points unis parfaits de I_p qui terminent les suites de points fixes infiniment voisins successifs de A, communs aux courbes $C'_0, C''_0, \ldots, C_0^{(\nu-1)}$. Il en résulte que sur la surface Φ_ν, les courbes $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$ doivent se réduire à des domaines de points isolés (en général multiples pour la surface). Ceci n'est possible que si les points $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{\nu-1}$ appartiennent aux courbes $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$.

Les ordres des surfaces $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_\nu$ vont en diminuant de n à $n - p$. On pourrait en déduire une limitation de la multiplicité du point A' pour Φ et des nombres η, ζ; nous ne le ferons pas, cela n'étant pas nécessaire pour notre objet.

14. Pour poursuivre la détermination de la structure du point uni A, il faut déterminer la multiplicité du point A pour les courbes $C'_0, C''_0, \ldots, C_0^{(\nu-1)}$.

Commençons par considérer le système linéaire complet $|hC|$, où h est un entier positif. Il est transformé en lui-même par T et contient p systèmes partiels $|(hC)_0|$, $|(hC)_1|$, ..., $|(hC)_{p-1}|$. A ces systèmes, nous attacherons respectivement les nombres $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$.

Le système $|(hC)_0|$ contient les courbes hC_0 et d'une manière générale, les courbes

$$\lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_{p-1} C_{p-1},$$

où l'on a

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{p-1} = h,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + (p-1)\lambda_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Le système $|(hC)_i|$ contient les courbes $(h-1)C_0 + C_i$ et d'une manière générale, les courbes

$$\lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_{p-1} C_{p-1},$$

où

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{p-1} = h,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + (p-1)\lambda_{p-1} \equiv i \pmod{p}.$$

On voit que le système $|(hC)|$ se comporte, vis-à-vis du point A, comme le système $|C|$.

Formons maintenant une suite de systèmes

$$|(hC)'_0|, \quad |(hC_0)''|, \quad \ldots, \quad |(hC)^{(\nu)}_0|,$$

comme nous avons formé la suite

$$|C'_0|, \quad |C''_0|, \quad \ldots \quad |C^{(\nu)}_0|.$$

Le système $|(hC)^{(i)}_0|$ contient les courbes $(h-1)C_0 + C^{(i)}_0$ et par conséquent se comporte au point A comme le système $|C^{(i)}_0|$.

Considérons les courbes

$$\lambda C_1 + \mu C_k,$$

où λ, μ sont des entiers positifs tels que

$$\lambda + \mu < p, \qquad \lambda + k\mu \equiv 0 \pmod{p}.$$

Posons $h = \lambda + \mu$. Les courbes considérées appartiennent au système linéaire $|(hC)_0|$ et ont en A la multiplicité $h < p$. Elles appartiennent donc à l'un des systèmes

$$|(hC)'_0|, \quad |(hC)''_0|, \quad \ldots, \quad |(hC)^{(\nu-1)}_0|.$$

15. Supposons que les courbes C'_0 aient en A la multiplicité $\lambda + \mu$, λ tangentes à ces courbes en A étant confondues avec a_k et μ avec a_1.

Considérons les courbes

$$K = \lambda C_1 + \mu C_k, \qquad H = (\lambda + \mu - 1)C_0 + C'_0;$$

nous allons démontrer qu'elles appartiennent à un même système linéaire appartenant à l'involution I_p et précisément au système $|(hC)'_0|$, où $h = \lambda + \mu$.

Aux courbes K et H correspondent sur $\Phi, \Phi_1, \ldots$ des courbes K′ et H′. Les premières rencontrent les courbes γ_{11}, γ_{k1} respectivement en μ et λ points; les secondes rencontrent ces courbes en τ_{11} et τ_{k1} points.

Nous allons considérer une courbe K et une courbe H irréductibles, déterminées. Elles déterminent un faisceau Σ de courbes du système complet $|hC'_1|$. Le faisceau Σ est transformé en lui-même par T, puisque K et H le sont. Pour notre objet, il suffira de démontrer que chaque courbe de Σ est transformée en elle-même par T.

La base de Σ se compose du point A compté un certain nombre de fois et d'un certain nombre de groupes de l'involution I_p.

Supposons tout d'abord que l'on ait $\eta = 1$. Alors, les points infiniment voisins successifs de A communs aux courbes C'_0, C'_k ont tous la même multiplicité μ et l'on a $\tau_{11} = \mu$. Considérons une courbe D quelconque de Σ et soit D′ la courbe de Σ que T lui fait correspondre. Les μ points de D, infiniment voisins de P_{11}, sont unis pour T, donc ils appartiennent à D′. Mais alors D et D′ ont en commun μ points en dehors de la base de Σ; elles coïncident donc et les courbes K appartiennent au système $|H|$.

Supposons maintenant $\eta > 1$ et par suite $\tau_{11} < \mu$. On peut supposer $\zeta > 1$, car si ζ était égal à l'unité, le raisonnement précédent pourrait être repris.

La courbe K′ coupe γ_{11} en $\tau_{11} < \mu$ points. Comme on peut supposer r et r_0 aussi grands qu'on le veut, il existe des courbes K′ contenant la courbe γ_{11} comme partie. La courbe γ_{11} est rationnelle et isolée sur les surfaces $\Phi, \Phi_1, \ldots$, par conséquent son degré est négatif. Il en résulte que les courbes $K' - \gamma_{11}$ rencontrent la courbe γ_{11} en plus de τ_{11} points. Si ce nombre est inférieur à μ, nous considérerons les courbes $K' - 2\gamma_{11}$ et ainsi de suite. Nous parviendrons finalement à des courbes rencontrant γ_{11} en $\mu_1 \geqq \mu$ points. Soit K_1 la courbe qui correspond sur F à une des courbes ainsi obtenues. Nous définirons le faisceau Σ par une courbe H quelconque et la courbe K_1. Les courbes du faisceau Σ ont en P_{11} la multiplicité μ. Si $\mu_1 = \mu$, le raisonnement fait plus haut peut être repris et les courbes de Σ sont transformées en elles-mêmes par T. On ne peut d'ailleurs avoir $\mu_1 > \mu$, car les points infiniment voisins successifs de A communs aux courbes H, K, ont en plus la multiplicité μ.

Nous voyons donc que les courbes $K = \lambda C_1 + \mu C_k$ considérées appartiennent au système $|(hC)'_0|$, donc on a

$$\lambda + k\mu \equiv 0 \pmod{p}.$$

16. Le raisonnement qui vient d'être fait peut également s'appliquer aux courbes $C''_0, C'''_0, \ldots, C_0^{(\nu-1)}$. Il se peut que certaines de ces courbes ne rencontrent pas les courbes γ_{11}, γ_{k1}; on devra alors considérer les courbes du système

$|(\lambda+\mu-1)C_0+C_0^{(i)}|$ contenant par exemple la courbe γ_{i1} un certain nombre de fois.

Pour étudier la structure du point uni A, nous devrons donc commencer par rechercher les entiers positifs λ, μ satisfaisant à la congruence

$$\lambda+k\mu\equiv 0 \pmod{p},$$

telle que $\lambda+\mu<p$. On rangera les solutions dans l'ordre des $\lambda+\mu$ croissants. On obtiendra ainsi les multiplicités du point A pour les courbes C_0', C_0'', ... et le nombre des tangentes à ces courbes en A confondues avec a_1 et avec a_k.

Dans la recherche des suites de points unis pour I_p, infiniment voisins successifs de A, communs aux courbes $C_0^{(i)}$, on devra tenir compte du fait que $|C_0^{(i)}|$ appartenant à l'involution I_p, son degré effectif est multiple de p et que, par conséquent, le nombre des points d'intersection de deux courbes $C_0^{(i)}$ absorbés en A est multiple de p.

De même, le nombre de points d'intersection de deux courbes $C_0^{(i)}$, $C_0^{(j)}$ absorbés en A doit être multiple de p. Si $i<j$, ce nombre est en général égal à celui relatif à deux courbes $C_0^{(i)}$, car les courbes $C_0^{(j)}$ sont des courbes $C_0^{(i)}$ particulières.

D'autre part, la formule de Zeuthen permettra de calculer les genres des courbes $\Gamma_0', \Gamma_0'', \ldots, \Gamma_0^{(\nu-1)}$; ces nombres vont en décroissant et sont inférieurs à π. Ils sont au moins égaux à $\pi-\frac{1}{2}(p-1)$.

III. — Étude d'un exemple.

17. Nous allons appliquer ce qui précède à un exemple, de manière à montrer le maniement de la méthode.

Nous supposerons $k=5$ et que le nombre premier p est de la forme $10\eta+3$. Cela exclut évidemment certaines valeurs de η telles que $\eta=3, 6, \ldots$.

La congruence

$$\lambda+5\mu\equiv 0 \pmod{p}$$

admet les solutions suivantes :

1°	$\lambda=5i+3$,	$\mu=2\eta-i$,	$(i=0, 1, \ldots, 2\eta-1)$;
2°	$\lambda=5i+1$,	$\mu=4\eta+1-i$	$(i=0, 1, 2, \ldots)$;
3°	$\lambda=5i+4$,	$\mu=6\eta+1-i$	$(i=0, 1, 2, \ldots)$;
4°	$\lambda=5i+2$,	$\mu=8\eta+2-i$	$(i=0, 1, 2, \ldots)$.

La solution donnant la valeur minimum pour $\lambda+\mu$ est obtenue dans le premier cas par $i=0$; on a $\lambda=3$, $\mu=2\eta$.

18. Les courbes C_0' ont en A la multiplicité $2\eta+3$, 2η tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et trois avec a_5 Ces courbes ont en commun quatre points infiniment voisins successifs A_1, A_2, A_3, A_4 de A, le premier étant sur a_1.

Ces points sont multiples d'ordre 2η pour les courbes et appartiennent aux courbes C_3. Les courbes C'_0 ont en outre en commun une suite $6\eta+1$ points $B_1, B_2, \ldots, B_{6\eta+1}$ infiniment voisins successifs de A, le premier B_1 étant situé sur a_3. Les $\eta-1$ premiers de ces points sont triples pour les courbes C'_0, le point B_η est double et les $5\eta+1$ points $B_{\eta+1}, \ldots, B_{6\eta+1}$ sont simples. Au point B_η est infiniment voisin un point $B_{\eta-1}$, simple pour toutes les courbes C'_0. Les points $B_1, B_2, \ldots, B_{6\eta+1}$ appartiennent aux courbes C_4.

Les points $A_4, B_{6\eta+1}, B_{\eta 1}$ sont unis parfaits pour I_p. Sur la surface Φ_4, il correspond à ces points respectivement une courbe rationnelle $\alpha_{2\eta}$, d'ordre 2η, une droite β_4 et une droite β'_4. Le point A' est multiple d'ordre $2\eta+2$ pour la surface Φ, le cône tangent en ce point à cette surface étant formé d'un cône d'ordre 2η et de deux plans.

La surface Φ_4 est d'ordre $n-2(\eta+1)$ et ses sections hyperplanes Γ'_0 sont de genre $\pi-(2\eta+1)$.

19. Étudions maintenant les courbes C''_0. Si $\eta \geqslant 2$, comme nous le supposerons d'abord, nous aurons $\lambda=8$, $\mu=2\eta-1$. Le point A est multiple d'ordre $2\eta+7$ pour les courbes C''_0, huit tangentes étant confondues avec a_3 et $2\eta-1$ avec a_4.

Les courbes C''_0 passent $2\eta-1$ fois par les points A_1, A_2, A_3, A_4 et par conséquent, sur la surface Φ_4 le point A'_4 appartient à la courbe $\alpha_{2\eta}$.

Nous supposerons que le point A'_4 n'appartient pas à la courbe β_4, c'est-à-dire que les courbes C''_0 passent par le point $B_{6\eta+1}$. Supposons alors que les x_8 premiers des points $B_1, B_2, \ldots, B_{6\eta+1}$ soient multiples d'ordre 8 pour les courbes C''_0, le suivant multiple d'ordre i et les x_1 derniers simples. On a

$$x_8+x_1=6\eta.$$

D'autre part, en exprimant que les courbes C_4 rencontrent les courbes C''_0 en p points confondus en A, on a

$$8x_8+i+x_1=8\mu-4.$$

On en déduit

$$7x_8=2\eta-(4+i).$$

Nous allons faire différentes hypothèses :

1° $\eta=7\xi$. — Nous avons $i=3$, $x_8=2\xi-1$.

Le point $B_{2\xi}$ étant triple pour les courbes C''_0 et le point $B_{2\xi-1}$ étant multiple d'ordre 8, les courbes C''_0 doivent avoir deux points doubles $B_{2\xi,1}$, $B_{2\xi,2}$ et un point simple $B_{2\xi,3}$ infiniment voisins successifs de $B_{2\xi}$. Le point $B_{2\xi,2}$ étant double et $B_{2\xi,3}$ simple, les courbes C''_0 doivent avoir un point simple $B_{2\xi,3,1}$, infiniment voisin de $B_{2\xi,3}$. Ce point $B_{2\xi,3,1}$ est uni parfait pour l'involution I_p.

2° $r_1 = 7\xi + 1$. — On a $i = 5$, $x_8 = 2\xi - 1$.

Le point $B_{2\xi}$ est quintuple pour les courbes C_0'' et celles-ci ont un point triple $B_{2\xi,1}$, infiniment voisin; elles ont en outre un point simple $B_{2\xi,1,1}$ infiniment voisin du précédent et deux points simples $B_{2\xi,1,1,1}$, $B_{2\xi,1,1,2}$, infiniment voisins successifs de $B_{2\xi,1,1}$. Le point $B_{2\xi,1,1,2}$ est uni parfait pour I_p.

3° $\mu = 7\xi + 2$. — On a $i = 7$, $x_8 = 2\xi - 1$.

Les courbes C_0'' ont en commun un point simple $B_{2\xi,1}$ infiniment voisin de $B_{2\xi}$ et cinq points simples, dont le dernier est uni parfait pour I_p, infiniment voisins successifs de $B_{2\xi,1}$.

4° $r_1 = 7\xi + 3$. — On a $i = 2$, $x_8 = 2\xi$.

Les courbes C_0'' ont en commun une suite de six points simples infiniment voisins de $B_2\xi_{+1}$, dont le dernier est uni parfait pour I_p.

5° $r_1 = 7 + 4$. — On a $i = 4$, $x_8 = 2\xi$..

Les courbes C_0'' ont en commun un point triple $C_{2\xi+1,1}$ et un point simple $B_{2\xi+1,2}$ infiniment voisins successifs de $B_{2\xi+1}$. Elles ont en outre en commun deux points simples $B_{2\xi+1,2,1}$, $B_{2\xi+1,2,2}$ infiniment voisins successifs de $B_{2\xi+1,2}$. Le point $B_{2\xi+1,2,2}$ est uni parfait pour I_p.

6° $r_1 = 7\xi + 5$. — On a $i = 6$, $x_8 = 2\xi$.

Les courbes C_0'' ont en commun un point double $B_{2\xi+1,1}$ infiniment voisin de $B_{2\xi+1}$, un point double $B_{2\xi+1,1,1}$ et un point simple $B_{2\xi+1,1,2}$ infiniment voisins successifs de $B_{2\xi+1,1}$; enfin un point simple $B_{2\xi+1,1,2,1}$, uni parfait pour I_p, infiniment voisin du point précédent.

L'hypothèse $r_1 = 7\xi + 6$ ne doit pas être envisagée, car alors $p = 70\xi + 63$ n'est pas premier.

Dans les différentes hypothèses envisagées, le degré du système $|\Gamma_0''|$ est égal à $n - (2r_1 + 3)$ et son genre à $\pi - (2r_1 + 1)$. Le point B_{r_1} n'appartient pas aux courbes C_0'', donc le point A_1', sur Φ_1, appartient à la droite β_1'. Nous avons déjà vu qu'il appartenait à la courbe α_{2r_1}.

La surface Φ_2 est d'ordre $n - (2r_1 + 3)$. Sur cette surface la courbe α_{2r_1} est d'ordre $2r_1 - 1$, la droite β_1 est une droite, mais la courbe β_1' se réduit au domaine d'un point multiple, appartenant à la courbe α_{2r_1}.

Nous avons supposé que les courbes C_0'' passaient par le point B_{6r_1+1}; nous verrons dans un instant que cette hypothèse est justifiée et nous n'examinerons pas les autres.

20. La valeur la plus petite de $\lambda + \mu$ donnée par les solutions du second type (n° 17) est $4r_1 + 2$ ($\lambda = 1$, $\mu = 4r_1 + 1$). Les solutions du premier type

donnent les valeurs de $\lambda+\mu$ allant en croissant lorsque i croît. Cherchons la plus petite valeur de i pour laquelle on a

$$2\eta+4i+3>4\eta+2,$$

c'est-à-dire

$$4i>2\eta-1.$$

Si $\eta=2\theta$, on a $i=\theta$; si $\eta=2\theta+1$, on a $i=\theta+1$.

Il en résulte que si $\eta=2\theta$, les courbes $C_0^{(\theta+1)}$ ont la multiplicité $4\eta+2$ au point A, $4\eta+1$ tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et une avec a_5. Si $\eta=2\theta+1$, ce sont les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ qui présentent ces particularités. Nous sommes donc conduit à traiter séparément les deux hypothèses.

21. Supposons tout d'abord $\eta=2\theta$, donc $p=20\theta+3$.

Les courbes $C_0^{(\theta+1)}$ ont la multiplicité $4\eta+2=8\theta+2$ en A, $8\theta+1$ tangentes étant confondues avec a_1 et une avec a_5. Il en résulte que le point B_1 est simple pour les courbes en question et comme celles-ci doivent rencontrer les courbes C_1 en p points confondus avec les courbes C_1, elles passent simplement par les points $B_1, B_2, \ldots, B_{6n+1}$.

Les courbes $C_0^{(\theta+1)}$ passent $3\theta+1$ fois par le point A_1 et 3θ fois par les points A_2, A_3, A_4. Elles ont en outre en commun 5θ points simples $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,5}$ infiniment voisins successifs de A_1. Le point $A_{1,5}$ est uni parfait pour l'involution I_p.

La surface $\Phi_{\theta+1}$ a l'ordre $n-(5\theta+2)$ et les courbes $\Gamma_0^{(\theta+1)}$ ont le genre $\pi-(4\theta+1)=\pi-(2\eta+1)$. On en conclut que sur la surface Φ_1, les points $A'_1, A'_2, \ldots, A'_\theta$ sont simples, le premier étant le point de rencontre des courbes $\alpha_{2\eta}$ et β'_1. Les points $A'_2, A'_3, \ldots, A'_\theta$ appartiennent également à la courbe α_{2n}, car sur $\Phi_{\theta+1}$, cette courbe a l'ordre 3θ. Les points $A'_2, A'_3, \ldots, A'_\theta$ sont d'ailleurs infiniment voisins successifs de A'_1.

Au domaine du point $B_{6\eta+1}$ correspond sur $\Phi_{\theta+1}$ une droite β_1; c'est pour cette raison que nous avons supposé plus haut que les courbes C''_0 passaient par le point $B_{6\eta+1}$; cette hypothèse est justifiée ici.

22. Toujours dans l'hypothèse $\eta=2\theta$, les courbes $C_0^{(\theta+1)}$ ont en A la multplicité $8\theta+3$, 3θ tangentes étant confondues avec a_1 et $5\theta+3$ avec a_5.

Les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ passent 3θ fois par chacun des points A_1, A_2, A_3, A_4 et l'on en conclut que, sur la surface $\Phi_{\theta+1}$, le point $A'_{\theta+1}$ n'appartient pas à la courbe α_{2n}.

Les courbes C_1 doivent rencontrer les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ en p points confondus en A. Si les dernières courbes passent même simplement par les points $B_1, B_2, \ldots, B_{6\eta+1}$, les courbes C_1 les rencontrent en $p+1$ points, donc les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ ne passent pas par $B_{6\eta+1}$ et sur la surface $\Phi_{\theta+1}$, le point A'_θ appartient à la droite β_1.

Une discussion assez longue, mais sans difficulté, montre que les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ passent neuf fois par le point B_1, six fois par les points $B_2, B_3, \ldots, B_{2\theta+1}$ et

trois fois par le point $B_{2\theta}$, c'est-à-dire par le point B_{η}. Elles passent en outre par certains points infiniment voisins de B_1 et trois fois par le point $B_{\eta,1}$.

Le nombre θ peut prendre l'une des formes $3\varphi+1$, $3\varphi+2$, puisque p est premier.

Si $\theta=3\varphi+1$, les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ ont en commun $5\varphi-1$ points triples $B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{1,5\varphi-1}$ et un point double $B_{1,5\varphi}$ infiniment voisins successifs de B_1, un point simple $B_{1,5\varphi,1}$ infiniment voisin de $B_{1,5\varphi}$ et un point simple $B_{1,5\varphi,1,1}$, uni parfait pour I_p, infiniment voisin de $B_{1,5\varphi,1}$.

Si $\theta=3\varphi+2$, les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ ont en commun une suite de $5\varphi+1$ points triples suivie d'un point simple, infiniment voisins successifs de B_1, le dernier point étant suivi de deux points simples dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p.

Dans les deux cas, le système $|\Gamma_0^{(\theta+2)}|$ a le degré $n-(5\theta+6)$ et le genre $\pi-4(\theta+1)=\pi-2(\eta+2)$.

Les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ passant trois fois par le point $B_{\eta,1}$, les courbes $\Gamma_0^{(\theta+2)}$ rencontrent en trois points la courbe β'_1. Plaçons-nous sur la surface Φ_1. Sur celle-ci les courbes $\Gamma_0^{(\theta+1)}$ sont découpées par les hyperplans ayant un contact d'ordre $\theta-1$ avec la courbe $\alpha_{2\eta}$ au point A'_1. Ces courbes ne rencontrent pas la droite β'_1. Les courbes $\Gamma_0^{(\theta+2)}$, qui sont des courbes $\Gamma_0^{(\theta+1)}$ particulières, devant rencontrer la droite β'_1, sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans précédents contenant en outre la droite β'_1.

Les courbes $\Gamma_0^{(\theta+2)}$ ne rencontrant pas la droite β_1, celle-ci doit rencontrer la droite β'_1 en un point distinct de A'_1.

23. Nous allons maintenant nous occuper de l'hypothèse $\eta=2\theta+1$.

Les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ ont en A la multiplicité $8\theta+6$, $8\theta+5$ des tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et la dernière étant a_5.

Les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ passent simplement par les points $B_1, B_2, \ldots, B_{6\eta+1}$, $3\theta+4$ fois par le point A_1 et $3\theta+1$ fois par chacun des points A_2, A_3, A_4. Elles ont en outre en commun un certain nombre de points infiniment voisins de A_1. Pour déterminer ces points, remarquons que p étant premier, θ ne peut être de la forme $3\varphi+1$.

Supposons $\theta=3\varphi$. Les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ ont en commun une suite de $5\varphi+1$ points $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,5\varphi}, A_{1,5\varphi+1}$ dont les 5φ premiers sont triples et le dernier simple. A ce dernier point sont infiniment voisins deux points simples $A_{1,5\varphi+1,1}, A_{1,5\varphi+1,2}$, dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p.

Supposons maintenant $\theta=3\varphi+2$. Les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ ont en commun $5\varphi+4$ points $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,5\varphi+3}, A_{1,5\varphi+4}$ dont les $5\varphi+3$ premiers sont triples et le dernier double. Elles ont en outre en commun un point simple $A_{1,5\varphi+4,1}$ infiniment voisin de $A_{1,5\varphi+4}$ et un point simple, uni parfait pour I_p, $A_{1,5\varphi+4,1,1}$, infiniment voisin de $A_{1,5\varphi+4,1}$.

Dans les deux cas, le système $|\Gamma_0^{(\theta+2)}|$ a le degré $n-5(\theta+1)$ et le genre

$\pi - 4\theta - 3 = \pi - (2\eta + 1)$. Sur la surface $\Phi_{\theta+1}$, le point $A'_{\theta+1}$ est simple. Comme dans le cas précédent (n° 21), sur la surface Φ_1, les points A'_1, A'_2, ..., $A'_{\theta-1}$ sont simples. Le point A'_1 appartient aux courbes $\alpha_{2\eta_1}$, β'_1 et les points A'_2, ..., $A'_{\theta+2}$ sont infiniment voisins successifs de A'_1 sur la courbe $\alpha_{2\eta_1}$.

Actuellement encore, au point $B_{6\eta_1+1}$ correspond sur $\Phi_{\theta+2}$ une droite β_1, ce qui justifie l'hypothèse faite plus haut que les courbes C''_0 passent par le point $B_{6\eta_1+1}$.

Sur la surface $\Phi_{\theta+2}$, au domaine du point $A_{1,5\eta_1+1,2}$ ou du point $A_{1,5\eta_1+4,1,1}$, selon la valeur de θ correspond une droite qui, représentant le point $A'_{\theta-1}$ de $\Phi_{\theta+1}$, est exceptionnelle.

24. Les courbes $C_0^{(\theta-3)}$ ont en A la multiplicité $8\theta + 9$ et $3\theta + 1$ de leurs tangentes en ce point coïncident avec a_1, les $5\theta + 8$ autres avec a_5. Ces courbes passent $3\theta + 1$ fois par chacun des points A_1, A_2, A_3, A_4. Elles passent en outre sept fois par le point B_1, six fois par les $2\theta - 1$ points $B_2, B_3, \ldots, B_{2\theta}$, trois fois par le point $B_{2\theta+1} = B_{\eta_1}$ et par le point B_{η_1+1}, enfin une fois par $5\theta + 1$ points $B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{1,5\theta+1}$, infiniment voisins successifs de B_1. Le point $B_{1,5\theta+1}$ est uni parfait pour l'involution I_p.

Le système $|\Gamma_0^{(\theta+3)}|$ a le degré $n - (5\theta + 9)$ et le genre $\pi - 4\theta - 5 = \pi - 2(\eta + 2)$.

Sur la surface Φ_1, le système $|\Gamma_0^{(\theta+2)}|$ est découpé par les hyperplans ayant en A'_1, avec la courbe $\alpha_{2\eta_1}$, un contact d'ordre θ; ces courbes ne rencontrent pas la droite β'_1 (en dehors du point fixe A'_1). Les courbes $\Gamma_0^{(\theta+3)}$ sont des courbes $\Gamma_0^{(\theta+2)}$ rencontrant la droite β'_1 en trois points variables; elles sont donc découpées sur Φ_1 par les hyperplans précédents passant par la droite β'_1.

Les courbes $C_0^{(\theta+3)}$ ne passent pas par le point $B_{6\eta_1+1}$, donc les courbes $\Gamma_0^{(\theta+3)}$ ne rencontrent pas la droite β_1 et celle-ci s'appuie donc en un point sur β'_1.

25. Nous n'étudierons pas le comportement en A des autres courbes des systèmes $|C_0^{(\theta)}|$; les cas considérés montrent comment la méthode doit être appliquée. Observons d'ailleurs que la structure du point de diramation A' est complètement déterminée.

Au point A', la surface Φ a un point multiple d'ordre $3\eta_1 + 2$, le cône tangent se composant d'un cône $\varphi_{2\eta_1}$ d'ordre 2η et de deux plans φ_1, φ'_1. Le plan φ'_1 rencontre le cône $\varphi_{2\eta}$ et le plan φ_1 chacun suivant une droite.

Sur la surface Φ_1, nous avons la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \alpha_{2\eta_1} + \beta'_1 + \beta_1.$$

En considérant les intersections des deux membres successivement avec les courbes $\alpha_{2\eta_1}$, β'_1, β_1, on trouve que ces courbes ont respectivement pour degrés virtuels $-(2\eta + 1)$, -3, -2.

Les courbes $\Gamma_0^{(\theta+2)}$ si $\eta = 2\theta$ et $\Gamma_0^{(\theta+3)}$ si $\eta_1 = 2\theta + 1$, appartiennent au système linéaire

$$|\Gamma| = |\Gamma'_0 - \beta'_1| = |\Gamma_0 - \alpha_{2\eta_1} - 2\beta'_1 - \beta_1|.$$

Elles sont précisément déduites du système en imposant aux courbes un contact d'ordre 0 ou d'ordre $0+1$ suivant que $r_1 = 2\theta$ ou $r_1 = 2\theta+1$, avec la courbe α_{2r_1} au point A'_1.

Les courbes Γ rencontrent la droite β'_1 en quatre points, la courbe α_{2r_1} en $2r_1 - 1$ points, mais ne rencontrent pas la droite β_1. Sur la surface F, il correspond aux courbes Γ des courbes passant $2r_1 - 1$ fois par les points A_1, A_2, A_3, A_4, quatre fois par les points B_{r_1}, B_{r_1+1}, huit fois par les points $B_1, B_2, \ldots, B_{r_1-1}$, $2r_1 + 7$ fois par le point A. Ce sont évidemment des courbes C''_0 particulières, puisque les courbes Γ sont des courbes Γ''_0 particulières.

26. Dans ce qui précède, nous avons supposé $r_1 > 2$ (n° 19). Pour $r_1 = 1$, nous avons $p = 13$ et pour $r_1 = 2$, $p = 23$. Dans ces cas, le système $|C''_0|$ a au point A un comportement différent de celui que nous avons étudié.

Dans l'hypothèse $p = 13$, $r_1 = 1$, le système $|C''_0|$ coïncide avec le système $|C_9^{(\theta+2)}|$ que nous avons étudié (n° 23) lorsque $r_1 = 2\theta+1$; il suffit de supposer $\theta = 0$.

Dans l'hypothèse $p = 23$, $r_1 = 2$, le système $|C''_0|$ coïncide avec le système $C_0^{(\theta-1)}$ étudié lorsque $r_1 = 2\theta$ (n° 21). Il suffira de poser $\theta = 1$.

Dans les deux cas, la singularité du point de diramation A′ pour la surface Φ se déduit du cas général en posant $r_1 = 1$ ou $r_1 = 2$.

'POSITIONS TYPIQUES

D'UN

ÉLÉMENT ALÉATOIRE DE NATURE QUELCONQUE

Par M. Maurice FRÉCHET.

PRÉFACE.

On a défini, dans le *Calcul des Probabilités*, différentes *valeurs typiques* d'un *nombre* aléatoire (ses valeurs : moyenne, équiprobable, dominante, etc.), qui ont toutes leurs usages en statistique mathématique. Nous avons déjà donné des généralisations de ces valeurs typiques sous le nom de « positions typiques d'un élément aléatoire de nature quelconque ». Laissant de côté la « position moyenne », pour laquelle nous renverrons aux Mémoires cités en note aux pages 211, 227, 228 [note (2)], nous étudierons dans ce qui suit de nouvelles généralisations *des autres* valeurs typiques. Elles seront présentées sous *deux* formes *non équivalentes* qui feront respectivement l'objet de la *Première* et de la *Seconde Partie* de ce Mémoire (1).

PREMIÈRE PARTIE.

LES POSITIONS TYPIQUES D'ORDRE NUL OU INFINI D'UN ÉLEMENT ALÉATOIRE DE NATURE QUELCONQUE.

RAPPEL.

Nous avons indiqué ailleurs (2) *pourquoi et comment s'impose pratiquement* comme théoriquement l'étude des éléments aléatoires de *nature quelconque*

(1) La Seconde Partie ne faisant pas usage des résultats de la Première, peut être lue indépendamment, sauf pour certaines définitions, d'ailleurs classiques, rappelées dans la Première Partie.

(2) *Les éléments aléatoires de nature quelconque* (*Ann. de l'Institut H. Poincaré*, t. XIV, 1948, p. 215-310).

(nombres, points, courbes, surfaces, etc.). Et nous avons montré qu'on peut les étudier simultanément quand on fait usage de la notion de *distance* de deux éléments abstraits.

Nous considérerons donc dans la suite des éléments X, Y, Z, ..., choisis simultanément au hasard à chaque épreuve parmi les éléments (de nature quelconque), dits « points » d'un ensemble $\mathcal{D}$, dit « espace distancié ». On suppose seulement qu'à chaque couple de « points », x, y, de $\mathcal{D}$ correspond un nombre (x, y) appelé *distance* de ces deux points et tel que :

1° $(x, y) = (y, x) \geq 0$;

2° $(x, y) = 0$ si x et y ne sont pas distincts et seulement dans ce cas;

3° On a l'inégalité triangulaire

$$(x, y) \leq (x, z) + (z, x).$$

Cela suffit pour qu'on puisse définir l'*écart moyen* $\theta_\alpha(a)$, *d'ordre* $\alpha > 0$ (1), *de l'élément aléatoire* X avec *l'élément certain* a, par la formule

$$\theta_\alpha(a) = \sqrt[\alpha]{\varphi_\alpha(a)},$$

où

$$\varphi_\alpha(a) = \mathfrak{M}(X, a)^\alpha \quad (2); \tag{1}$$

$\varphi_\alpha(a)$ peut d'ailleurs être fini ou non. Nous avons démontré note (2), page 211 que l'on a

$$\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha} \leq \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Z)^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(Z, Y)^\alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha \geq 1. \tag{2}$$

D'autre part, on démontre facilement que si a, b, c sont trois nombres quelconques, on a

$$|b + c|^\alpha \leq |b|^\alpha + |c|^\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \leq 1, \tag{3}$$

d'où résulte immédiatement que

$$\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha \leq \mathfrak{M}(X, Z)^\alpha + \mathfrak{M}(Z, Y)^\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \leq 1. \tag{4}$$

En prenant $Y \equiv a$, $Z \equiv b$, il résulte alors de (2) et (4) que si $\mathfrak{M}(X, a)^\alpha$ est fini pour au moins une position b du point certain a, il en est de même quel que soit a (que α positif soit ≤ 1 ou ≥ 1). On dira, dans ce cas, que X est *borné en moyenne d'ordre* α.

Observons qu'on a

$$\mathfrak{M}(X, a)^\alpha = \int_0^{+\infty} t^\alpha d\varpi(t),$$

où

$$\varpi(t) = \text{Prob}[(X, a) < t].$$

---

(1) Dans la suite, la lettre α désignera toujours un nombre positif.

(2) Nous désignons par $\mathfrak{M}U$ la valeur moyenne d'un nombre aléatoire U.

Or $\int_{\alpha}^{+\infty} t^{\alpha}\, d\varpi(t)$ est évidemment une fonction non décroissante de α; en particulier, si cette intégrale est finie, elle reste finie en remplaçant α par un nombre inférieur. Par conséquent, si X est borné en moyenne d'ordre α, il l'est aussi pour tout ordre positif $\beta < \alpha$.

Quand X est borné en moyenne d'ordre α, nous appellerons *position typique d'ordre* α de X, tout point certain γ_α de $\mathcal{D}$ (s'il en existe) tel que $\mathfrak{M}(X, a)^{\alpha}$ atteigne sa borne inférieure au point γ_α. On peut, par un passage à la limite convenablement défini (voir p. 228), étendre cette définition au cas où X n'est pas borné en moyenne d'ordre α.

INTRODUCTION.

Il est clair qu'on ne peut appliquer directement ces définitions pour $\alpha = 0$, ni pour $\alpha = +\infty$. Dans le cas où X est un *nombre* aléatoire, on a cependant déjà interprété le milieu de l'intervalle de variation de X (quand cet intervalle est fini), comme la valeur typique d'ordre infini de X (Gauss) et les dominantes de X comme ses valeurs typiques d'ordrenul (Charles Jordan), — dans les deux cas au moyen de passages à la limite.

Nous n'avons cependant pas trouvé dans les *Traités de Calcul des Probabilités* ou de *Statistique mathématique*, des énoncés précis de ces interprétations et en ce qui concerne l'ordre nul nous n'y avons même trouvé *aucune démonstration*. En cherchant à combler ces lacunes, nous nous sommes d'ailleurs aperçu que *plusieurs* manières d'employer le *passage à la limite* peuvent se présenter et qu'elles *ne sont pas équivalentes*.

C'est ce que nous avons exposé dans un Mémoire (1) concernant uniquement les *nombres* aléatoires.

Nous nous proposons ici d'étendre ces résultats au cas d'éléments aléatoires de nature quelconque.

L'étude que nous avons faite du problème actuel dans le cas des *nombres* aléatoires, nous a conduit à considérer, sans prétendre épuiser toutes les possibilités, trois modes de passage à la limite.

Trois passages à la limite non équivalents.

Première définition. — S'il y a une limite de l'écart moyen $\vartheta_\alpha(a)$ d'ordre α de X avec le point certain a, quand $\alpha \to 0$ (ou $\to \infty$), on cherche la borne infé-

(1) *Les valeurs typiques d'ordre nul et d'ordre infini d'un nombre aléatoire* (*Revue Institut Intern. Statistique*, 1948).

Ce Mémoire a été résumé sous le même titre dans les *Comptes rendus du Colloque International sur le Calcul des Probabilités et ses applications* tenu à Lyon en juin-juillet 1948 (*Publication du Centre National de la Recherche Scientifique*).

rieure de cette limite quand a varie. Ce sera l'écart moyen d'ordre nul (ou infini) de X (tout court). Et si cette borne inférieure est atteinte pour au moins une position particulière de a, celle-ci sera une position typique d'ordre nul (ou infini) de X.

Seconde définition. — Nous verrons que cette première définition ne donne pas toujours un résultat satisfaisant. On cherchera alors la limite de $\varphi_\alpha(a) = [\theta_\alpha(a)]^\alpha$ quand $\alpha \to 0$ (ou $\to \infty$). Si cette limite existe et si sa borne inférieure est atteinte pour au moins une position de a, on appellera celle-ci position typique d'ordre nul (ou infini) de X.

Troisième définition. — Soit 0_α l'écart moyen d'ordre α de X tout court. S'il tend vers une limite quand $\alpha \to 0$ (ou $\to \infty$), cette limite sera l'écart moyen d'ordre nul (ou infini) de X tout court. Si pour une suite de valeurs de α tendant vers zéro ou l'infini, X a au moins une position typique d'ordre α, γ_α, et si la suite correspondante des points γ_α a une limite quand $\alpha \to 0$ (ou $\to \infty$), cette limite sera une position typique d'ordre nul (ou infini) de X.

Application des trois définitions.

Ordre nul.

Comportement asymptotique de $\mathfrak{M}(X, a)^\alpha$. — Cherchons d'abord la limite de $\varphi_\alpha(a)$ quand $\alpha \to 0$. La question ne se pose que s'il existe au moins une valeur α_0 de α pour laquelle X soit borné en moyenne d'ordre α_0 (et alors comme on l'a vu, de tout ordre positif $\alpha \leqq \alpha_0$).

Soit, dans cette hypothèse, ε, un nombre positif arbitraire; on peut trouver un nombre $k > 1$, tel que

$$1 - \varpi(k) < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_k^{+\infty} t^{\alpha_0}\, d\varpi(t) < \varepsilon,$$

d'où

$$\int_k^{+\infty} t^\alpha\, d\varpi(t) < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad \alpha < \alpha_0.$$

On peut alors écrire, en désignant par ξ, un nombre positif $< 1 (< k)$,

$$\varphi_\alpha(a) = \int_0^{\xi} t^\alpha\, d\varpi(t) + \int_\xi^k + \int_k^{+\infty} = I + J + K,$$

avec $K < \varepsilon$ pour $\alpha < \alpha_0$. D'autre part, on a

$$\xi^\alpha |\varpi(k) - \varpi(\xi)| \leqq J \leqq k^\alpha [1 - \varpi(\xi)].$$

Enfin pour évaluer I, on peut observer que t^α étant nul pour $t = 0$, on ne change pas l'intégrale I en modifiant $\varpi(t)$ pour $t = 0$ seulement, en particulier

en remplaçant $\varpi(o)$ par $\varpi(+o)$. On a alors

$$I \leq \xi^{\alpha}[\varpi(\xi) - \varpi(+o)].$$

et pour $\xi < 1$,

$$I \leq \varpi(\xi) - \varpi(+o).$$

On peut alors choisir ξ assez petit, indépendamment de α, pour que I soit inférieur à ε. D'où

$$\xi^{\alpha}[\varpi(k) - \varpi(\xi)] \leq \varphi_{\alpha}(a) \leq 2\varepsilon + k^{\alpha}[1 - \varpi(\xi)].$$

En prenant α assez petit ($\alpha < \alpha_1 < \alpha_0$) on aura

$$1 - \varepsilon < \xi^{\alpha}, \qquad k^{\alpha} < 1 + \varepsilon,$$

d'où

$$\varpi(k) - 1 - \varepsilon[\varpi(k) - \varpi(\xi)] \leq \varphi_{\alpha}(a) - [1 - \varpi(\xi)] < 2\varepsilon + \varepsilon[1 - \varpi(\xi)]$$

et par suite,

$$-2\varepsilon < \varphi_{\alpha}(a) - [1 - \varpi(\xi)] < 3\varepsilon \qquad \text{pour} \quad \alpha < \alpha_1.$$

ε et ξ étant fixés, on a, pour chacune des limites λ de $\varphi_{\alpha}(a)$ quand $\alpha \to o$,

$$|\lambda - [1 - \varpi(\xi)]| < 3\varepsilon,$$

et en faisant tendre ε et ξ vers zéro

$$\lambda = 1 - \varpi(+o).$$

D'où enfin

$$\varphi_0(a) = \left[\lim_{\alpha \to 0} \mathfrak{M}(X, a)^{\alpha}\right] = 1 - \text{Prob}[X = a]. \tag{5}$$

Seconde définition. — Ainsi, quand $\alpha \to o$, $\mathfrak{M}(X, a)^{\alpha} \to 1$, sauf peut-être pour les points a qui seraient les positions prises chacune par X avec une probabilité positive. Comme la somme de ces probabilités est ≤ 1, il ne peut y avoir qu'un ensemble dénombrable (infini, fini ou vide) de tels points $x_1, x_2, \ldots$. Dès lors si p_i est la probabilité que X vienne en x_i, on voit que :

ou bien il n'existe pas de points x_i (positions prises chacune par X avec une probabilité positive p_i) et alors

$$\varphi_0(a) = 1$$

partout dans $\mathfrak{D}$;

ou bien il existe au moins un point x_i et alors

$$\varphi_0(a) = 1$$

partout dans $\mathfrak{D}$, *sauf* quand a est l'un des points x_i, *auquel cas*

$$\varphi_0(x_i) = 1 - p_i.$$

Puisque, alors, il y a au moins un point a pour lequel la fonction $\varpi(t)$ correspondante est discontinue pour $t = o$, nous appellerons ce cas, le *cas discontinu*.

Dans le premier de ces deux cas, la deuxième définition ne conduit à *aucun résultat*. Au contraire, dans le second cas, le cas discontinu, il y a dans l'ensemble dénombrable des $p_i \leqq 1$, un nombre maximum p (qui est l'un au moins des p_i, mais ne peut être égal qu'à un nombre fini des $p_i : p_{h_1}, p_{h_2}, \ldots, p_{h_r}$). Il y a donc un nombre fini de *dominantes* (ou positions *les plus probables*) de X, soient $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_r}$ et $\varphi_0(x)$ atteint son minimum en ces points :

Ainsi, *lorsque l'un au moins des points de l'espace distancié* $\mathfrak{D}$ *peut être occupé par* X *avec une probabilité positive, il y a un nombre fini de dominantes de* X *et l'ensemble de ces dominantes est précisément l'ensemble des positions d'ordre nul de* X *au sens de la seconde définition.*

Comportement asymptotique de l'écart moyen d'ordre α. — Pour étudier la première et la troisième définition, nous allons chercher si $\theta_\alpha(a)$ a une limite quand $\alpha \to 0$.

S'il existe au moins un point x_i qu'occupe X avec une probabilité p_i positive, on a simultanément

$$\lim_{\alpha \to 0} \varphi_\alpha(x_i) = 1 - p_i < 1 \qquad \text{et} \qquad \theta_\alpha(x_i) = [\varphi_\alpha(x_i)]^{\frac{1}{\alpha}},$$

d'où

$$\theta_0(x_i) = \lim_{\alpha \to 0} \theta_\alpha(x_i) = 0. \tag{6}$$

Puisque, quel que soit a, $\theta_\alpha(a) \geqq 0$, $\theta_\alpha(a)$ atteint nécessairement son minimum aux points x_i. Donc, si X peut occuper au moins un point x_i avec une probabilité positive, tous les points x_i de cette nature sont positions typiques d'ordre nul au sens de la première définition. Dans ce cas discontinu, la première définition est trop lâche, la seconde définition désigne des positions typiques plus représentatives de X. Nous allons voir que c'est l'inverse dans l'autre cas, que nous pourrons appeler le cas continu.

Sans distinguer immédiatement entre le cas continu et le cas discontinu, soit a une position de X de probabilité nulle, telle donc que la fonction $\varpi(t)$ correspondante soit continue pour $t = 0$. On a vu qu'alors

$$\varphi_\alpha(a) = 1 + \varepsilon_\alpha(a) \qquad \text{avec} \quad \lim_{\alpha \to 0} \varepsilon_\alpha(a) = 0.$$

Dès lors

$$\mathcal{L}\theta_\alpha(a) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}[1 + \varepsilon(a)] \quad (^1)$$

dont la partie principale est $\frac{1}{\alpha}\varepsilon_\alpha(a)$. Si cette dernière quantité a une limite $\lambda_0(a)$ quand $\alpha \to 0$, on pourra écrire

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\varepsilon_\alpha(a)}{\alpha} = \lambda_0(a) = \lim_{\alpha \to 0} \mathcal{L}\theta_\alpha(a).$$

(1) Nous désignerons ici, en général, par $\mathcal{L}y$ le logarithme népérien de y.

On peut écrire

$$\frac{\varepsilon_\alpha(a)}{\alpha} = \mathfrak{M}\left[\frac{(X, a)^\alpha - 1}{\alpha}\right] = \mathfrak{M}\left[\frac{e^{\alpha U} - 1}{\alpha}\right] = \mathfrak{M}\mu(\alpha) \qquad \text{avec} \quad U = \mathcal{L}(X, a) \quad (1).$$

Or, en posant $z = \alpha U$, on a

$$\frac{d\mu(\alpha)}{d\alpha} = \frac{e^{\alpha u} U\alpha - (e^{\alpha U} - 1)}{\alpha^2} = \frac{e^{\alpha U}}{\alpha^2}[z - 1 + e^{-z}].$$

Mais, quel que soit z, la parenthèse est positive (nulle pour $z = 0$), donc $\mu(\alpha)$ est une fonction croissante de α, qui d'ailleurs, quand $\alpha \to 0$, converge vers $U = \mathcal{L}(X, a)$. Si donc, bien que $U = \mathcal{L}(X, a)$ soit infini pour $X = a$, ce nombre aléatoire a une moyenne finie $\mathfrak{M}\mathcal{L}(X, a)$, on aura d'abord

$$\frac{\varepsilon_\alpha(a)}{\alpha} \geq \mathfrak{M}\mathcal{L}(X, a),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{t^\alpha - 1}{\alpha}\right) d\varpi(t) \geq \int_0^{+\infty} (\mathcal{L}t)\, d\varpi(t).$$

Mais puisque $\frac{t^\alpha - 1}{\alpha}$ tend vers $\mathcal{L}t$ quand $\alpha \to 0$, la première intégrale qui décroît avec α et reste constamment au moins égale à la seconde, tendra vers la seconde.

En résumé, quand il y a une probabilité nulle que $X = a$ et quand, de plus, $\mathcal{L}(X, a)$ a une moyenne finie, $\theta_\alpha(a)$ a une limite $\theta_0(a)$ quand $\alpha \to 0$ et l'on a

$$\mathcal{L}\theta_0(a) = \lim_{\alpha \to 0} \mathcal{L}\theta_\alpha(a) = \mathfrak{M}\mathcal{L}(X, a). \tag{7}$$

Remarque. — Dans le cas particulier, le cas *discret*, où X n'a qu'un nombre fini de positions possibles, alors, si a est distinct de ces positions, $\mathcal{L}(X, a)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs, toutes finies, donc $\mathfrak{M}\mathcal{L}(X, a)$ existe et est égal à

$$\sum_{i=1}^{r} p_i \mathcal{L}(x_i, a),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont les positions possibles de X, qui ont des probabilités positives $p_1, \ldots, p_r$. D'où

$$\theta_0(a) = \prod_{i=1}^{r} (x_i, a)^{p_i} \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1. \tag{8}$$

De sorte que l'écart moyen d'ordre nul de X avec a est alors moyenne géométrique (pondérée par les probabilités p_i) des distances de a aux positions

(1) *Loc. cit.*, p. 216.

possibles de X. Ceci a lieu d'après (7) pour $a \neq$ des x_i; et nous avons prouvé plus haut l'égalité (6) d'après laquelle cette formule (8) reste exacte pour $a \equiv$ l'un des x_i.

Cas général. — Nous savons déjà que si l'on était dans le cas discontinu, $\theta_0(a)$ serait nul pour $a \equiv$ l'un des x_i.

Qu'on soit ou non dans ce cas, on peut dire, d'après (7), que $\theta_0(a)$ est une sorte de moyenne géométrique de la distance (X, a).

Cas continu. — Si $\mathfrak{ML}(X, a)$ atteint sa borne inférieure pour $a \equiv \gamma_0$, on pourra dire que γ_0 est une *position typique d'ordre nul de* X *au sens de la première définition*. Mais il n'y a plus, dans le cas continu, *aucune raison d'interpréter une telle position comme une dominante de* X. Cela est bien clair quand il s'agit d'une position qui aurait la probabilité positive maximum, puisque nous nous plaçons maintenant dans le cas continu où aucune position de X n'a une probabilité positive. Mais l'interprétation par les dominantes reste inadmissible si, dans le cas continu, on appelle, comme d'habitude, dominante, une position où la densité de probabilité a sa valeur maxima. On pourrait essayer d'éluder la difficulté en disant qu'on ne voit pas bien dans le cas d'un élément de nature quelconque comment définir la densité. Mais même dans le cas des nombres aléatoires, nous avons montré, dans notre mémoire cité plus haut en note (1), p. 213, que cette interprétation est impossible. Elle l'est pour deux raisons. D'une part, il peut arriver qu'on soit dans le cas continu sans que X ait partout une densité de probabilité et que partout $\mathfrak{M}\mathfrak{L}|X - a|$ existe. D'autre part, même parmi les cas où X a partout une densité de probabilité — et nous allons montrer qu'en ce cas $\mathfrak{M}\mathfrak{L}|X - a|$ existe (en supposant toujours l'existence de $\mathfrak{M}|X - a|^{2\alpha_0}$) — nous avons pu citer un exemple où il y a à la fois une valeur où la densité de probabilité est maximum et une valeur typique d'ordre nul, mais où ces valeurs sont distinctes. Tel est le cas où le nombre aléatoire X reste entre -1 et 2 et a une densité de probabilité

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1 - x) & \text{pour } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{2 - x}{3} & \text{pour } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

La dominante est évidemment égale à zéro et la valeur typique d'ordre nul, au sens de la troisième comme au sens de la première définition, est égale à $0,1414 \neq 0$.

Question d'existence. — Il reste important de voir à quelle condition existe la moyenne de $\mathfrak{L}(X, a)$

$$\mathfrak{M}\mathfrak{L}(X, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{L}(t)\, d\varpi(t).$$

A *priori*, il y a doute sur la convergence aux deux limites d'intégration. Cependant, observons que si, comme on l'a supposé jusqu'ici, $\mathfrak{M}(X, a)^2$ existe pour au moins une valeur α_0 de α, alors l'intégrale $\int_1^{\infty} \left(\frac{t^2-1}{\alpha}\right) d\varpi(t)$ est finie pour $\alpha = \alpha_0$ et la fonction sous le signe $\int$ est supérieure à celle figurant dans $\int_1^{\infty} (\mathcal{L}t)\, d\varpi(t)$. Dès lors, cette dernière est finie et nous voyons que pour que $\mathfrak{M}\mathcal{L}(X, a)$ existe il faut et il suffit que l'intégrale $\int_0^1 \mathcal{L}t\, d\varpi(t)$ existe. On peut d'ailleurs donner une condition suffisante (non nécessaire) pour que cette dernière intégrale existe. Il suffit en effet que $\varpi(t)$ ait une dérivée pour $t = 0$. Car, on peut écrire

$$\int_0^1 (\mathcal{L}t)\, d\varpi(t) = [(\mathcal{L}t)\varpi(t)]_0^1 - \int_0^{\eta_1} \frac{\varpi(t)}{t}\, dt - \int_{\eta_1}^1 \frac{\varpi(t)}{t}\, dt,$$

et ε étant donné, on peut choisir η_1 de sorte que

$$\frac{\varpi(t)}{t} = \varpi'(0) + \theta \quad \text{avec} \quad |\theta| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 < t < \eta_1 < 1.$$

Et alors

$$[(\mathcal{L}t)\varpi(t)]_0^1 = -\lim_{t>0} \{t\,\mathcal{L}t[\varpi'_0 + \theta]\} = 0,$$

$$\int_0^{\eta_1} \frac{\varpi(t)}{t}\, dt < [\varpi'(0) + \varepsilon]\eta_1, \qquad \int_{\eta_1}^1 \frac{\varpi(t)}{t}\, dt < \frac{1}{\eta_1}(1 - \eta_1).$$

Dans le cas où X est un nombre aléatoire, $\varpi'(0)$ existe évidemment si X a une densité de probabilité pour $X = a$.

Valeurs plus typiques *que les dominantes.* — Revenons au cas *discret* où il n'existe qu'un nombre fini de positions de X et soient $x_1, x_2, \ldots, x_r$, celles de ces positions qui ont des probabilités positives $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Nous allons montrer que dans ce cas, la troisième définition est plus stricte que la première et plus précisément que si toute position typique d'ordre nul au sens de la *troisième* définition est une dominante, la réciproque n'est pas vraie.

On a ici $0_\alpha \leq \theta_\alpha(x_i) \to 0$ d'après (6). Donc $0_\alpha \to 0$ et l'écart moyen d'ordre nul au sens de la troisième définition est nul comme au sens de la première.

La propriété annoncée ci-dessus et la fausseté de sa réciproque sont évidentes dans le cas où il n'existe aucune suite de valeurs de $\alpha \to 0$ pour chacune desquelles il existe une position typique d'ordre α, γ_α, de X. La question n'est intéressante que lorsque, au contraire, il existe une telle suite σ. Plaçons-nous dans ce cas.

On a vu que si x_h est une dominante, $\lim \varphi_\alpha(x_h) = 1 - p$. Donc, pour ε donné et pour α assez petit, $(\alpha < \beta)$, on a

$$\varphi_\alpha(\gamma_\alpha) - \varphi_\alpha(x_h) < 1 - p - \varepsilon.$$

On peut prendre $\varepsilon > 0$, tel que $0 < 1 - p + \varepsilon < 1$ et, s'il existe des $p_i < p$, on peut même prendre ε, de sorte que $1 - p + \varepsilon$ soit inférieur à tous les $1 - p_i$ correspondants.

Soit, d'autre part, Δ, la plus petite des distances mutuelles des points x_j et $\delta < \frac{\Delta}{2}$. S'il existe un point a à distance au moins égale à δ de tous les x_j, on aura pour ce point

$$\mathfrak{M}(X, a)^\alpha \geqq \delta^\alpha.$$

Mais il existe $\beta' < \beta$, tel que pour $\alpha < \beta'$, on ait $\delta^\alpha > 1 - p + \varepsilon$, d'où

$$\varphi_\alpha(a) > 1 - p + \varepsilon > \varphi_\alpha(\gamma_\alpha) \qquad \text{pour} \quad \alpha < \beta'.$$

Ainsi γ_α ne peut être un tel point a et par suite, pour $\alpha < \beta'$, il existe au moins un des points x_k, soit x_{i_α} tel que $(\gamma_\alpha, x_{i_\alpha}) < \delta$. Pour $j \neq i_\alpha$, on aura

$$(\gamma_\alpha, x_j) \geqq (x_j, x_{i_\alpha}) - (x_{i_\alpha}, \gamma_\alpha) > \Delta - \delta > \delta,$$

d'où

$$1 - p + \varepsilon > \varphi_\alpha(\gamma_\alpha) = \mathfrak{M}(\gamma_\alpha, X)^\alpha \geqq \sum_{j \neq i_\alpha} p_j (\gamma_\alpha, x_j)^\alpha > \delta^\alpha (1 - p_{i_\alpha}).$$

Quand $\alpha \to 0$ par une suite σ de valeurs, on peut extraire de cette suite une suite pour laquelle i_α, qui ne peut prendre que les valeurs $1, 2, \ldots, r$, garde la même valeur l. Il résulte alors des dernières inégalités qu'on aura

$$1 - p + \varepsilon \geqq 1 - p_l.$$

ce qui, d'après ce qui précède, n'est possible que si $p_l = p$, c'est-à-dire si x_l est une dominante.

Ainsi, en appelant β_δ le nombre β', à tout $\delta < \frac{\Delta}{2}$ correspond une dominante x_l telle que pour la suite σ

$$(\gamma_\alpha, x_l) < \delta \qquad \text{pour} \quad \alpha < \beta_\delta.$$

Prenons $\delta = \frac{\Delta}{n+2} \left(< \frac{\Delta}{2} \right)$; à tout entier n correspondent des valeurs ω_n, l_n de β_δ et de l. On peut supposer $\omega_n < \frac{1}{n}$ et l'on a sur σ

$$(\gamma_\alpha, x_{l_n}) < \frac{\Delta}{n+2} \qquad \text{pour} \quad \alpha < \omega_n.$$

L'une au moins, h, des valeurs de l_n est répétée une infinité de fois quand n croît. Donc l'une au moins, x_h, des dominantes de X est la limite d'une suite des γ_α et par suite est position typique d'ordre nul de X au sens de la troisième définition. Inversement soit γ_0, une telle position, c'est-à-dire la limite d'une suite convergente σ' de points γ_α: de cette suite on pourra, comme pour la suite σ, extraire une suite tendant vers une dominante de X, donc γ_0 est une telle dominante.

Ainsi, quand il existe au moins une suite de valeurs de $\alpha \to 0$ pour chacune desquelles il existe au moins une position typique γ_α d'ordre α de X, alors, au sens de la troisième définition comme de la première : il existe au moins une position typique d'ordre nul de X et toute telle position est une dominante de X. Mais la différence entre les deux définitions intervient dans la réciproque. [Bien entendu, cette différence *disparaît* quand il n'y a qu'*une* dominante. Dans ce cas (mais supposant toujours l'existence de la suite σ des γ_α), alors au sens de la troisième comme de la première définition, il existe une position typique d'ordre nul et *une seule* et *elle coïncide* avec *la* dominante].

Pour montrer que s'il y a plusieurs dominantes, elles ne sont pas toutes nécessairement positions typiques d'ordre nul au sens de la troisième définition, il suffit de considérer le cas d'un *nombre* aléatoire X qui ne peut prendre que les valeurs 0, 8, 9, (par exemple), avec les mêmes probabilités $\frac{1}{3}$. Alors ces trois valeurs sont des dominantes. On peut montrer que pour chaque α, γ_α existe et est une de ces trois valeurs. Mais on a $\varphi_\alpha(0) > \varphi_\alpha(9) > \varphi_\alpha(8)$. Donc $\gamma_\alpha = 8$ et par suite, il existe une position typique $\gamma_0 = 8$ d'ordre nul et une seule et celle-ci est une dominante; mais les deux autres dominantes ne sont pas des positions typiques d'ordre nul au sens de la troisième définition.

On peut d'ailleurs indiquer des cas très généraux où il en est ainsi pour des éléments aléatoires de nature quelconque. Revenons, en effet, au cas d'un élément aléatoire pris au hasard dans un espace distancié $\mathfrak{D}$ et qui, dans celui-ci, ne peut prendre qu'un nombre fini de positions. Soit Δ_h la plus petite des distances du point x_h aux autres x_i et D_h la plus grande des distances mutuelles de ces autres x_i. Nous dirons que x_h est une position de X qui est *éloignée* si $\Delta_h > D_h$. Nous voulons montrer que si une dominante de X est éloignée sans être unique, elle ne peut être position typique d'ordre nul au sens de la troisième définition. Autrement dit, une dominante éloignée, x_h ne peut être limite d'une suite σ de positions typiques γ_α d'ordre α tendant vers zéro. Car s'il en était ainsi, il existerait un nombre $\beta < 1$ tel que pour $\alpha < \beta$ les γ_α de la suite σ soit à distance

$$(\gamma_\alpha, x_h) < \frac{1}{2}(\Delta_h - D_h) \tag{9}$$

de x_h. On aurait alors, si h' est une autre dominante,

$$\varphi_\alpha(\gamma_\alpha) - \varphi_\alpha(x_{h'}) = \sum_{h \neq l \neq h'} p_l [(\gamma_\alpha, x_l)^\alpha - (x_{h'}, x_l)^\alpha] + p[(\gamma_\alpha, x_h)^\alpha + (\gamma_\alpha, x_{h'})^\alpha - (x_{h'}, x_h)^\alpha].$$

Pour $\alpha < \beta < 1$, le dernier crochet est, d'après (3), ≥ 0. Dans le crochet précédent, on a

$$(\gamma_\alpha, x_l) \geqq (x_h, x_l) - (\gamma_\alpha, x_h) > \Delta_h - \frac{1}{2}(\Delta_h - D_h) = \frac{\Delta_h + D_h}{2},$$
$$(x_{h'}, x_l) \leqq D_h,$$

de sorte que ce crochet est supérieur à

$$\left[\left(\frac{\Delta_h + D_h}{2}\right)^{\alpha} - (D_h)^{\alpha}\right](1 - p_h - p_{h'}).$$

D'après la définition même de D_h, on a supposé implicitement qu'il y a au moins trois positions de X à probabilités positives et l'on a supposé l'existence des deux dominantes x_h, $x_{h'}$. On a donc

$$1 - p_h - p_{h'} > 0.$$

Finalement, on voit qu'on aurait

$$\varphi_\alpha(\gamma_\alpha) > \varphi_\alpha(x_{h'}) \qquad \text{pour} \quad \alpha < \beta < 1,$$

contrairement à la définition de γ_α.

La condition suffisante que nous venons d'établir n'est d'ailleurs pas nécessaire, car dans l'exemple numérique précédent, elle exclurait la valeur o comme valeur typique d'ordre nul (au sens de la troisième définition), mais elle n'exclurait pas la valeur 9. Mais ce même exemple a suffit pour montrer que la troisième définition *sélectionne*, parmi les dominantes, certaines d'entre elles. *Cette sélection paraît légitime* : le simple fait que les dominantes distinguées ainsi sont positions typiques d'ordre nul les rend plus typiques que les autres. Ce point de vue est confirmé par l'exclusion des dominantes éloignées qui, par le fait même de cet éloignement, sont intuitivement moins représentatives que les autres, du point aléatoire X. Nous verrons, d'ailleurs, dans la seconde partie de ce Mémoire, page 237, qu'on peut opérer dans le même cas discret, une sélection différente parmi les dominantes.

Ordre infini.

Borne stochastique. — Supposons qu'il existe un sphéroïde de rayon fini ρ et de centre a tel qu'il y ait une probabilité nulle que X soit en dehors de ce sphéroïde. Alors, quel que soit le point b de $\mathcal{D}$, il existe aussi un sphéroïde de centre b ayant la même propriété. [Il suffit évidemment de lui donner le rayon $(a, b) + \rho$]. Nous dirons alors que X est *stochastiquement borné*.

Quand X n'est pas stochastiquement borné, la probabilité p_ρ que $(X, a) > \rho$ est positive quel que soit ρ. On a donc

$$\mathfrak{M}(X, a)^\alpha \geqq p_\rho \rho^\alpha,$$

d'où

$$\theta_\alpha(a) \geqq \rho\,(p_\rho)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{10}$$

Dès lors quand $\alpha \to \infty$, la plus petite des limites de $\theta_\alpha(a)$ est $\geqq \rho$ et ceci quel que soit ρ. Donc $\theta_\alpha(a) \to \infty$ et par suite aussi $\varphi_\alpha(a)$. Ainsi la *seconde* comme la

première définition des positions typiques d'ordre infini de X ne sont applicables que *si* X *est borné stochastiquement.*

Plaçons-nous donc dans ce cas, et désignons par ρ_a *la borne inférieure* (≥ 0) *des valeurs de* ρ *telles que* $\text{Prob}[(X, a) > \rho]$ soit nulle. On aura aussi évidemment

$$\text{Prob}[(X, a) > \rho_a] = 0. \tag{11}$$

L'inégalité (10) subsistera pour tout $\rho < \rho_a$ (si $\rho_a \neq 0$), de sorte que

$$\lim_{\alpha \to \infty} \theta_\alpha(a) \geq \rho_a \tag{12}$$

(et ceci subsiste même si $\rho_a = 0$).

D'autre part, on a évidemment d'après (11)

$$\mathfrak{M}(X, a)^\alpha \leq (\rho_a)^\alpha,$$

d'où

$$\theta_\alpha(a) \leq \rho_a. \tag{13}$$

Il résulte finalement de (13) et (12) que

$$\rho_a = \lim_{\alpha \to \infty} \theta_\alpha(a) = \theta_\infty(a). \tag{14}$$

Soit maintenant R la borne inférieure des rayons ρ_a quand a varie dans $\mathcal{D}$. On pourra appeler R le *rayon de variation de* X. Alors quand X est stochastiquement borné :

l'*écart moyen* θ_∞ *d'ordre infini de* X (tout court) *est égal au rayon de variation de* X.

Lorsque, de plus, il existe un point a pour lequel $\rho_a = R$, on pourra appeler a un *centre de variation* de X. Alors *s'il existe* un centre de variation de X, *ce centre est une position typique d'ordre infini* γ_∞, *de* X au sens de la première définition et réciproquement.

La seconde définition donne ici un résultat peu satisfaisant. En effet, on a l'égalité (14), avec

$$\varphi_\alpha(a) = [\theta_\alpha(a)]^\alpha.$$

Donc $\mathfrak{M}(X, a)^\alpha$ tend vers $+\infty$ pour $\rho_a > 1$ et vers zéro pour $\rho_a < 1$. Dès lors quand le rayon de variation R est plus grand que l'unité, la seconde définition n'est pas plus applicable que quand il était infini. Quand $R < 1$, il y a peut être des points a pour lesquels $\mathfrak{M}(X, a)^\alpha \to \infty$ et il y en a sûrement d'autres pour lesquels $\mathfrak{M}(X, a)^\alpha$ atteint son minimum qui est nul. Dès lors, l'ensemble des positions typiques d'ordre infini au sens de la seconde définition sera l'ensemble des points a pour lesquels $\rho_a < 1$. (Il faudrait voir ce qui concerne les points a pour lesquels $\rho_a = 1$, mais la seconde définition étant évidemment trop lâche, nous négligeons l'étude de ce cas.)

Par contre, la seconde définition peut rendre service, en la modifiant légèrement, dans le cas où la première est inapplicable, c'est-à-dire où X n'est pas borné stochastiquement.

Il peut arriver dans ce cas que cependant X soit borné en moyenne de tout ordre α (comme cela a lieu, par exemple, pour un *nombre* aléatoire laplacien).

Soit alors m_α la borne inférieure de $\varphi_\alpha(a)$ quand a varie; il peut arriver en outre que la plus petite des limites de

$$\mathfrak{M}(X, a)^\alpha - m_\alpha,$$

(qui est ≥ 0) quand $\alpha \to \infty$ soit une fonction finie $h(a)$ pour au moins un point a de $\mathcal{D}$. Il sera alors naturel de considérer $h(a)$ comme une « *partie finie* » de $\varphi_\alpha(a)$ et d'appeler position typique d'ordre infini de X, toute position de a s'il en existe où $h(a)$ atteint un minimum. Dans le mémoire cité plus haut, nous avons montré que de telles circonstances peuvent se présenter au moins pour les nombres aléatoires, en donnant comme exemple, le cas où X a une densité de probabilité égale à $\frac{e^{-x}}{2}$. On trouve que $h(a)$ est nul pour $a = 0$ et infini pour $a \neq 0$.

Une définition géométrique du centre de variation.

Domaine de variation. — Les éléments ou *points* de l'espace distancié $\mathcal{D}$ se partagent en deux catégories : dans l'une figure tout point c de $\mathcal{D}$ qui est le centre d'un sphéroïde σ_c de rayon non nul tel que la probabilité que X appartienne à σ_c soit nulle. Pour tout point p de $\mathcal{D}$ de la seconde catégorie il y a, quel que soit le nombre positif r, une probabilité positive que X soit à distance $\leq r$ de p.

Nous appellerons *domaine de variation de* X, l'ensemble $\mathcal{D}_1$ des points de la seconde catégorie (que nous appellerons *points positifs* par rapport à X). Il peut d'ailleurs arriver que $\mathcal{D}_1$ soit identique à $\mathcal{D}$. Dans tous les cas, il est clair que $\mathcal{D}_1$ est un ensemble *fermé* (c'est-à-dire contenant ses points limites).

La définition même de $\mathcal{D}_1$ justifie assez bien sa dénomination de domaine de variation. Elle est encore mieux justifiée quand l'espace distancié $\mathcal{D}$ est en même temps *séparable* (c'est-à-dire quand il existe un ensemble dénombrable N de points $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ de $\mathcal{D}$ tel que tout point de $\mathcal{D}$ soit un point de N ou limite d'une suite de points de N). On peut démontrer dans ce cas que la probabilité que X se trouve dans le domaine de variation $\mathcal{D}_1$ est égale à l'unité. Cela est évident si $\mathcal{D}_1$ est identique à $\mathcal{D}$. Dans le cas contraire, il suffit de démontrer que la probabilité que X appartienne à $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$ est nulle. Soit x un point de $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$; il est centre d'un sphéroïde S de rayon $\lambda \neq 0$, tel que $\{\text{Prob}[X \in S]\} = 0$; il existe au moins un point r_n de N tel que $(x, r_n) < \frac{\lambda}{4}$. Le sphéroïde S′ de centre r_n et rayon $\frac{\lambda}{4}$ contient x. Le sphéroïde S″ de centre r_n et de rayon double,

$\frac{\lambda}{2}$ appartient à S, donc $\{\text{Prob}[X \in S'']\} = 0$. Si l'on associe à r_n le sphéroïde S_n de centre r_n dont le rayon est la moitié de la borne supérieure λ_n des rayons R tels que $\{\text{Prob}[(X, r_n) \leq R]\} = 0$, S_n contiendra S', le rayon de S_n est $\geq \frac{\lambda}{4}$, donc S_n contient x. Ainsi tout point x de $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$ appartient à l'un des sphéroïdes S_n et l'on a, quel que soit n, $\{\text{Prob}[X \in S_n]\} = 0$. Comme la famille des S_n est dénombrable, il en résulte que la probabilité que X appartienne à l'ensemble K des points des S_n est nulle et comme $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$ appartient à K, on a bien $\{\text{Prob}[X \in \mathcal{D} - \mathcal{D}_1]\} = 0$.

Soit, maintenant, ρ'_x la borne supérieure des distances de x aux points de $\mathcal{D}_1$. On a évidemment $\rho'_x \leq \rho_x$. Or, on n'a $(X, x) > \rho'_x$ que si X n'appartient pas à $\mathcal{D}_1$ et par suite $\{\text{Prob}[(X, x) > \rho'_x]\} = 0$. Mais ceci n'est possible, par définition de ρ_x, que si $\rho'_x \geq \rho_x$. D'où finalement $\rho_x = \rho'_x$.

Mais alors, on voit que le calcul de ρ_x est devenu indépendant du Calcul des Probabilités, dès qu'on a déterminé $\mathcal{D}_1$; ρ_x est défini *géométriquement* comme la borne inférieure de la distance de x aux points de $\mathcal{D}_1$.

En ce qui concerne la détermination de $\mathcal{D}_1$, si, par exemple, $\mathcal{D}$ est un espace cartésien à un nombre fini r de dimensions, $\mathcal{D}_1$ contient les points (en ensemble tout au plus dénombrable et éventuellement vide) qui sont des positions de X à probabilité positive, $\mathcal{D}_1$ contient aussi les lignes à une dimension sur lesquels la densité *linéaire* de probabilité de X est positive, s'il en existe, etc., ..., il contient les points s'il en existe où la densité de probabilité à r dimensions de X est positive; et $\mathcal{D}_1$ peut encore contenir d'autres catégories de points.

Cas du plan. — Nous donnerons deux exemples de centre de variation.

Soit X un point choisi au hasard dans un plan et supposons que son domaine $\mathcal{D}_1$ de variation soit borné avec un centre de symétrie O. Alors il y a un centre de variation et un seul, qui est confondu avec O.

En effet, puisque $\mathcal{D}_1$ contient ses points limites et est borné, ρ_0 est égal à la distance de O à un point y au moins de $\mathcal{D}_1$. Soit y' symétrique de y par rapport à O (*fig.* 1). Pour tout point x, la plus grande des distances xy, xy', par

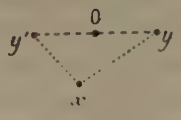


Fig. 1.

exemple xy est $\leq \rho_x$ et $\geq Oy = \rho_0$. D'où $\rho_x \geq \rho_0$. Donc O est un centre de variation de X. S'il y en avait un autre, par exemple x, on aurait $\rho_x \geq xy \geq Oy = \rho_0$ avec $\rho_x = \rho_0$; on aurait $Oy = xy \geq xy'$, d'où $yy' \geq xy' + xy$, ce qui n'est possible que si $yy' = xy' + xy$. Donc x devrait être sur yy' entre y et y' et puisque $Oy = xy$, x serait confondu avec O.

II. Soient a, b, c trois points non alignés. Nous allons examiner simultanément les trois cas suivants pour la loi de probabilité d'un point X pris au hasard dans le plan abc : 1° X ne peut prendre que les positions a, b, c chacune avec une probabilité positive; 2° X ne peut être que sur les côtés du triangle abc, avec une densité *linéaire* de probabilité, éventuellement variable, mais toujours positive sur ces côtés; 3° X a une densité superficielle de probabilité partout positive à l'intérieur et sur le périmètre du triange abc et nulle ailleurs. Dans les trois cas, $\mathcal{D}_1$ comprend les trois points a, b, c et ne comprend aucun point extérieur au triangle abc.

Alors pour tout point x du plan, ρ_x sera égal à la plus grande des distances xa, xb, xc. Si $\rho_x = xa$, par exemple, c'est que x est du côté opposé à a des perpendiculaires N, M aux milieux des côtés ab, ac, c'est-à-dire dans la région couverte de hachures. Pour que x soit un centre de variation, il faut que x soit, dans cette région, le plus rapproché possible de a. Quand les trois angles du triangle abc sont aigus (*fig.* 2), x doit être au centre O du cercle circonscrit

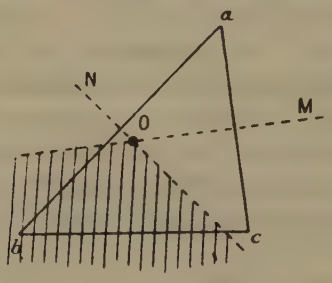


Fig. 2.

à abc. Dans le cas contraire, si par exemple l'angle en b est obtus (*fig.* 3), le le point de la région qui est le plus proche de a est le milieu m du côté opposé

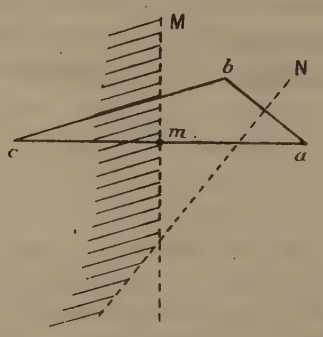


Fig. 3.

à l'angle obtus. Réciproquement, ces deux points O ou m sont dans les deux cas respectifs des points où ρ_x atteint son minimum.

Ainsi, il existe un centre de variation de X et un seul; il n'est jamais extérieur au triangle *abc*; il est confondu avec le centre du cercle circonscrit à *abc* si tous les angles de ce triangle sont aigus et si un de ces angles est obtus ou droit, le centre de variation de X est le milieu du côté opposé.

Cas de l'espace cartésien à r dimensions. — Il est évident que le raisonnement fait pour l'exemple I précédent s'étend au cas où X est choisi au hasard dans un espace cartésien à un nombre fini r de dimensions et où son domaine de variation est borné et a un centre de symétrie.

DEUXIÈME PARTIE.

UNE SECONDE DÉFINITION GÉNÉRALE DES POSITIONS TYPIQUES D'UN ÉLÉMENT ALÉATOIRE DE NATURE QUELCONQUE.

Rappel de définitions précédentes des positions typiques. — Dans deux mémoires récents (¹), nous avons entrepris une étude de la théorie des éléments aléatoires de nature quelconque. (Nous renverrons à ces mémoires pour la justification de la nécessité de cette étude, *tant du point de vue pratique*, que du point de vue théorique).

Dans le premier mémoire, nous avons donné une définition de la moyenne d'un élément aléatoire abstrait, basée sur une nouvelle généralisation de la notion d'*intégrale*. Mais il fallait supposer que l'élément abstrait fut choisi au hasard dans un espace *vectoriel* distancié (dit encore de Wiener-Banach). Étant donné qu'on n'a pas encore résolu la question de savoir si certains espaces distanciés (aussi importants que l'espace des courbes, l'espace des surfaces, par exemple), peuvent être considérés de façon naturelle comme vectoriels distanciés, nous avons cru nécessaire de donner dans le second mémoire, une définition de la moyenne tout à fait différente de la première et applicable à des éléments aléatoires appartenant à un espace distancié quelconque (défini p. 212). Cette seconde définition a en outre l'avantage de se prêter à une généralisation, la nouvelle définition de la moyenne apparaissant comme le cas particulier où $\alpha = 2$, d'une définition des positions typiques d'ordre α. Or on sait que lorsque l'élément aléatoire est un nombre, les valeurs typiques les plus connues peuvent être considérées comme des valeurs typiques

---

(¹) *L'intégrale abstraite d'une fonction abstraite d'une variable abstraite et son application à la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque* (*Revue Scientifique*, 80ᵉ année, 1942, p. 483-512).

Pour le second mémoire, *voir* la note (²), p. 211.

d'ordre α avec $\alpha = 0$, 1, 2 ou infini (¹). Cette définition des positions typiques d'ordre α se subdivise en deux. Soit U un élément aléatoire pris au hasard dans un espace distancié quelconque $\mathcal{D}$.

1° S'il existe au moins un élément certain c de $\mathcal{D}$ tel que la moyenne $\mathfrak{M}(U, c)^\alpha$ soit finie (on dira alors que U est borné en moyenne d'ordre α), on appellera position typique d'ordre α de X tout élément certain de $\mathcal{D}$ s'il en existe tel que $\mathfrak{M}(U, a)^\alpha$ (qui est une fonction du point certain a), atteigne pour $a \equiv \gamma$ sa borne inférieure. (C'est la définition déjà donnée page 213 où avait été annoncé le complément qui suit.)

2° Quand U n'est pas borné en moyenne d'ordre α, on considère un élément certain b et l'on définit un élément aléatoire auxiliaire U_n comme identique à U pour $(U, b) \leq n$ et à b dans le cas contraire. Soit alors m_n la borne inférieure de $\mathfrak{M}(U_n, a)^\alpha$. Supposons qu'il existe au moins un point certain a, de $\mathcal{D}$, tel que la plus petite des limites pour n infini de

$$\mathfrak{M}(U_n, a)^\alpha - m_n,$$

soit une quantité finie $h(a)$. On pourra considérer $h(a)$ comme la « *partie finie* » de $\mathfrak{M}(U, a)^\alpha$ et l'on appellera position typique d'ordre α de U tout point γ de $\mathcal{D}$ indépendant de b, s'il en existe, tel que $h(a)$ atteigne sa borne inférieure pour $a \equiv \gamma$.

Cette définition en deux temps s'applique en particulier à la moyenne pour $\alpha = 2$.

Ultérieurement, M. Shafik Doss a donné (²) une *troisième* définition de la moyenne, qui a sur la première l'avantage d'être applicable à tout espace distancié et sur la seconde de n'avoir qu'une forme valable (que l'élément aléatoire considéré, U soit ou non borné en moyenne d'ordre 2). Nous avons indiqué (³) à la suite de la note de M. Doss, que sa définition pouvait, par une modification très simple, s'étendre à d'autres positions typiques que la moyenne. C'est cette extension que nous allons étudier, laissant à M. Doss le soin de tirer les conséquences (⁴) de sa définition de la moyenne.

Toutefois, avant de procéder à cette extension dans le cas d'un élément U de nature quelconque, il nous a paru nécessaire d'étudier son application au cas

---

(¹) Toutefois les cas de $\alpha = 0$ et $\alpha = \infty$ sont des cas limites où le processus de convergence peut être envisagé de diverses manières non équivalentes. En particulier, quand une dominante n'est pas unique, elle n'est pas toujours d'ordre nul. Voir à ce sujet notre mémoire, *Les valeurs typiques d'ordre nul ou infini d'un nombre aléatoire*, en cours d'impression, ou bien la Première Partie du présent mémoire.

(²) *Sur la moyenne d'un élément aléatoire abstrait* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1418-1419).

(³) *Sur une nouvelle définition des positions typiques d'un élément aléatoire abstrait* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1420).

(⁴) Dans un mémoire en cours d'impression au *Bulletin des Sciences Mathématiques*.

classique où U est un *nombre* aléatoire, dans un mémoire séparé (¹) auquel nous renverrons dans la suite en le désignant par la lettre N.

Troisième définition de la moyenne. — Shafik Doss appelle moyenne d'un élément aléatoire U choisi au hasard dans un espace distancié $\mathcal{D}$, tout élément certain a de $\mathcal{D}$, s'il en existe, tel que

$$(a, \lambda) = \mathfrak{M}(U, \lambda),$$

quel que soit l'élément certain λ de $\mathcal{D}$. Dans cette définition de la moyenne intervient déjà une moyenne, mais c'est la moyenne $\mathfrak{M}(\ldots, \lambda)$ d'un *nombre* aléatoire, moyenne qu'on peut supposer définie d'avance.

Et d'autre part si l'on applique la définition au cas où $\mathcal{D}$ est l'espace des nombres réels et où $(x, y) = |x - y|$, on peut prouver d'après Shafik Doss que si la moyenne classique du nombre U existe, il existe un nombre a et un seul et il est égal à $\mathfrak{M}U$.

Seconde définition des positions typiques.

On peut généraliser l'idée qui est à la base de la définition de Shafik Doss *en remplaçant* le symbole $\mathfrak{M}$ de la moyenne *par le symbole* T *d'une autre valeur typique d'un nombre aléatoire.*

Supposant d'une façon générale que l'on ait défini une valeur typique TP d'un nombre aléatoire P (il suffit que TP soit défini pour $P \geq 0$), on pourra représenter par $\mathfrak{T}U$ et appeler position typique de U correspondante au symbole T, tout élément certain a de $\mathcal{D}$, s'il en existe, tel que

$$(a, \lambda) \leq T(U, \lambda),$$

pour tout élément certain λ de $\mathcal{D}$.

Comme dans le mémoire N, nous allons étudier l'application de cette définition en prenant pour TP successivement les valeurs typiques les plus usuelles d'un nombre aléatoire P (laissant de côté le cas traité par Shafik Doss, où TP est la moyenne de P). A titre d'application, on montrera aussi comment la théorie des éléments aléatoires abstraits peut apporter des faits nouveaux non seulement dans des domaines nouveaux, mais aussi dans la Théorie classique des probabilités en l'appliquant pour commencer aux points aléatoires d'un plan et plus généralement aux points aléatoires d'un espace euclidien à un nombre fini de dimensions.

Position centrale.

Nous emploierons (provisoirement, dans ce mémoire) l'expression (parfois usitée en d'autres sens) valeur centrale d'un nombre aléatoire X pour l'abscisse

(¹) *Une propriété des valeurs typiques d'un nombre aléatoire.*

du milieu de « l'intervalle de variation stochastique » de P. (L'intervalle de variation stochastique de X étant par définition le plus petit segment α, β tel que la probabilité que $\alpha \leq X \leq \beta$ soit égale à l'unité.) Nous dirons que X est *stochastiquement borné* quand cet intervalle est fini. La définition de la valeur centrale de X n'a évidemment de sens que si X est stochastiquement borné. Dans ce cas, nous représenterons cette valeur centrale par $\dot{X}$.

Nous allons maintenant appliquer notre définition générale en prenant pour TP la valeur centrale $\dot{P}$ de P.

Par définition, nous appellerons position centrale d'un élément U choisi au hasard dans un espace distancié $\mathcal{O}$ tout élément certain γ de $\mathcal{O}$, s'il en existe, tel que,

$$(\gamma, \lambda) \leq \dot{R}, \qquad \text{avec} \quad R = (U, \lambda), \tag{1}$$

par tout élément certain λ de $\mathcal{O}$, en représentant par $\dot{R}$ la « valeur centrale » du nombre aléatoire R.

La définition n'a évidemment de sens que si U est *borné stochastiquement*, c'est-à-dire s'il existe au moins un point certain a de $\mathcal{O}$ tel que l'intervalle de variation stochastique de (U, a) soit fini. Car dans ce cas

$$(U, \lambda) \leq (U, a) + (a, \lambda)$$

et (U, λ) est aussi stochastiquement borné pour chaque position de λ, tandis que si l'intervalle de variation stochastique de (U, a) est infini, il en sera de même de

$$(U, \lambda) \geq (U, a) - (a, \lambda).$$

Supposons donc U stochastiquement borné; pour chaque point certain λ de $\mathcal{O}$, il existe au moins un nombre $\rho_\lambda \geq 0$ tel que l'on ait

$$\{\text{Prob}[(U, \lambda) \leq \rho_\lambda]\} = 1.$$

Soit ρ_λ' la borne inférieure de ρ_λ. Il est clair que la valeur centrale de (U, λ) est $\leq \rho_\lambda'$. Donc si γ existe, un premier renseignement sur sa position sera fourni par la relation

$$(\gamma, \lambda) \leq \rho_\lambda'.$$

Et si la borne inférieure R de ρ_λ' est atteinte au moins en un point c (qu'on peut appeler centre de variation de U), on aura

$$(\gamma, c) \leq R.$$

Cas du plan. — Supposons que U soit un point pris au hasard dans un plan et plaçons-nous dans le cas où U est stochastiquement borné et où γ existe, cas où il existe au moins un cercle S de centre γ dans lequel U se trouve « presque certainement », c'est-à-dire avec une probabilité égale à l'unité. Soit Δ un dia-

mètre illimité de ce cercle. Si l'on prend λ sur Δ et si l'on appelle (m, M) les extrémités de l'intervalle de variation stochastique de $R = (U, \lambda)$, il est clair que m et M sont égales aux longueurs de deux vecteurs λl, λL issus de λ (*fig.* 4)

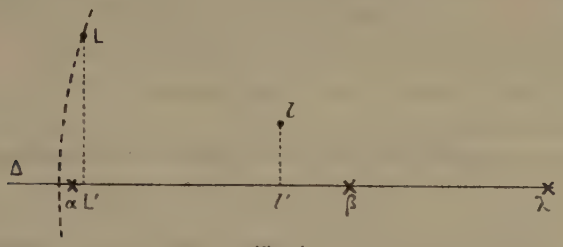


Fig. 4.

et où les points l, L appartiennent à S. En appelant α, β les extrémités de l'intervalle de variation stochastique de la projection X de U sur Δ et μ le milieu de cet intervalle, on va montrer que, quand λ s'éloigne à l'infini, les projections l', L' de l, L sur Δ tendent vers α, β et que $(\lambda, l) - (\lambda, \beta)$, $(\lambda, L) - (\lambda, \alpha)$ tendent vers zéro de sorte que

$$\hat{R} = \frac{1}{2}[(\lambda, l) + (\lambda, L)] \to \frac{(\lambda, \beta) + (\lambda, \alpha)}{2} = (\lambda, \mu).$$

Si $\gamma\mu$ n'était pas nul, alors en ayant soin de placer λ en dehors de $\gamma\mu$, du côté de μ, on aurait ainsi, d'après (1),

$$0 \leq (\gamma, \mu) = (\lambda, \gamma) - (\lambda, \mu) \leq (\lambda, \gamma) - [\hat{R} - \varepsilon] \leq \varepsilon,$$

où $\varepsilon \to 0$ quand $\lambda \to \infty$, d'où $(\gamma, \mu) = 0$. Il en résultera que si γ existe, sa projection sur une droite quelconque est le milieu de l'intervalle de variation stochastique de la projection de U sur cette droite.

Reste à prouver que

$$\varepsilon = \hat{R} - (\lambda, \mu) = \frac{1}{2}\{|(\lambda, l) - (\lambda, \beta)| + |(\lambda, L) - (\lambda, \alpha)|\}$$

tend vers zéro quand $\lambda \to \infty$.

Les points l' et L' sont évidemment sur le segment $\alpha\beta$ (*fig.* 4). Soit l_0 un des points-limites de l' quand $\lambda \to \infty$; l_0 est sur $\alpha\beta$. Le cercle S' de centre λ passant par l aurait pour une de ses limites la perpendiculaire D à Δ en l_0 et il y a une probabilité nulle que U soit intérieur à ce cercle S', donc une probabilité nulle que U soit du même côté de D que λ. Supposons que λ se soit éloigné du côté de β. Si l_0 était distinct de β, β ne serait donc pas une extrémité de l'intervalle de variation stochastique de X. Ainsi, finalement, l' tend vers β. De même L' tend vers α. Or

$$l\lambda - \beta\lambda = \sqrt{l'\lambda^2 + ll'^2} - \beta\lambda = \frac{l'\lambda^2 - \beta\lambda^2 + ll'^2}{\sqrt{\quad} + \beta\lambda} \leq \frac{l'\beta(l'\lambda + \beta\lambda) + ll'^2}{2\beta\lambda} = \frac{l'\beta}{2} + \frac{l'\beta\, l'\lambda + ll'^2}{2\beta\lambda}.$$

Mais $l'\beta \to 0$, $\frac{l'\lambda}{\beta\lambda} \to 1$, ll' reste borné quand $\lambda \to \infty$ puisque l et l' restent dans S. On voit bien que $|l\lambda - \beta\lambda| \to 0$. On verrait de même que $L\lambda - \alpha\lambda \to 0$.

Ce résultat étant acquis, deux conclusions s'en suivent. Pour toute droite Δ' du plan, appelons D' la perpendiculaire à Δ' menée par le milieu de l'intervalle de variation stochastique de la projection de U sur Δ' :

Ou bien il existe un point O par lequel passent toutes les droites D'. Alors, si γ existe, il est confondu avec O;

Ou bien un tel point O n'existe pas alors γ n'existe pas non plus.

On voit d'abord que s'il existe une position centrale, elle est *unique*. Mais il est bien clair qu'en général un tel point O n'existe pas et par conséquent, en général, il n'existe pas de position centrale. Par exemple, supposons que U ait partout une densité de probabilité et que celle-ci soit positive sur une aire triangulaire *abc* et nulle en dehors. En prenant pour Δ' successivement chacun des côtés et supposant qu'aucun des angles du triangle *abc* ne soit obtus, on voit que si O existait, il serait le centre du cercle circonscrit à *abc*. Mais en prenant pour Δ' successivement les trois hauteurs du triangle, on voit que ce point devrait se projeter sur les trois hauteurs en leurs milieux, ce qui n'est pas possible.

Même dans le cas où O existe, l'existence de γ n'est pas démontrée. Cependant, il y a des cas où il existe certainement une position centrale. Reprenons le même exemple, mais en remplaçant l'aire triangulaire par un ensemble E de points dont nous supposons d'abord seulement qu'il soit borné et qu'il ait un centre de symétrie, O. Il est clair que toutes les droites D' passeront par ce centre. S'il existe une position centrale, elle sera en ce centre. Pour montrer que ce centre est bien une position centrale, soient λ un point quelconque du plan, λn la plus courte distance de λ à E (n appartenant à E ou en étant un point limite) et n' le point symétrique de n par rapport à O. On a évidemment en posant encore $R = (U, \lambda)$

$$\mathring{R} \geq \frac{(\lambda, n) + (\lambda, n')}{2},$$

et puisque λO est une médiane du triangle $\lambda nn'$, on a

$$\frac{(\lambda, n) + (\lambda, n)}{2} \geq (\lambda, O).$$

Ainsi on a bien

$$(\lambda, O) \leq \mathring{R}.$$

Cas d'un espace euclidien à n dimensions. — Le raisonnement précédent s'étend au cas où le point U est pris au hasard dans un espace euclidien $\mathfrak{E}_n$ à un nombre entier n de dimensions. On suppose qu'on a pris pour distance (x, y) de deux points de coordonnées $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$;

$$(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Supposons que U soit stochastiquement borné et qu'il ait une position centrale γ. Soit alors Δ' une droite quelconque de $\mathcal{D}_n$ et Δ une parallèle à Δ' par γ. Par un changement de coordonnées orthogonales, on peut supposer que Δ soit l'axe des x_1 et γ l'origine. Le raisonnement précédent sera encore valable et montrera que si γ existe, γ est situé sur le plan D' perpendiculaire à Δ' mené par le milieu de l'intervalle de variation stochastique de la projection de U sur Δ'.

Une position centrale ne peut donc exister que si les plans D' correspondant aux diverses directions Δ' passent par une même point qui serait la position centrale. Donc, s'il en existe une, il n'en existe qu'une, mais en général, il n'en existe pas.

Cependant, le raisonnement fait dans le cas du plan peut se répéter ici et montre que si U a partout une densité de probabilité et si celle-ci est positive sur un ensemble E de points de $\mathcal{D}_n$ et nulle en dehors, alors, dans le cas où E est borné et possède un centre de symétrie O, U a ce point pour position centrale.

Position équiprobable.

Rappelons d'abord, pour éviter toute confusion, qu'on appelle valeur équiprobable d'un *nombre* aléatoire X, tout nombre certain ν tel que l'on ait simultanément

$$\left\{\text{Prob}\,[X \leq \nu]\right\}\left\{\geq \frac{1}{2} \leq \text{Prob}\,[X \geq \nu]\right.$$

On représente un tel point, ν, par la notation $\overline{\overline{X}}$.

Nous allons alors appliquer la définition générale de la page 229 en prenant pour valeur typique TP de P une valeur équiprobable de P. Nous appellerons alors *position équiprobable* d'un élément U choisi au hasard dans un espace *distancié* quelconque $\mathcal{D}$, tout élément certain δ de $\mathcal{D}$, s'il en existe, tel que

$$(\delta, \lambda) \leq \overline{(U, \lambda)},$$

pour tout élément certain λ de $\mathcal{D}$.

Cas du plan. — Le résultat et la méthode seront analogues à ceux qui concernent la position centrale.

Supposons qu'un point U, choisi au hasard dans un plan π, ait au moins une position équiprobable δ, et soit X la projection de U sur une droite quelconque Δ passant par δ dans le plan π. Soit (α, β) le segment équiprobable de X (éventuellement réduit à un point).

Nous voulons montrer que δ est sur le segment (α, β). En effet, en orientant les abscisses sur Δ de α vers β, supposons par exemple $\alpha \leq \beta < \delta$. Prenons alors λ sur Δ de sorte que $\lambda < \alpha$.

L'intérieur du cercle $(U, \lambda) < (\delta, \lambda)$ tend, sans décroître, quand λ s'éloigne de α vers $-\infty$, vers le demi-plan $X < \delta$. La probabilité que U appartienne à ce cercle tend donc vers la probabilité que U appartienne à ce demi-plan. Or

$$\{\text{Prob}[X < \delta]\} > \frac{1}{2}, \qquad \text{puisque} \quad \delta > \beta.$$

Donc pour λ assez loin de α et négatif, on aurait aussi

$$\{\text{Prob}[(U,\lambda) < (\delta,\lambda)]\} > \frac{1}{2},$$

et par suite

$$(\delta, \lambda) > \overline{R},$$

contrairement à l'hypothèse sur δ.

On verrait de même qu'on ne peut avoir $\delta < \alpha$; d'où finalement

$$\alpha \leq \delta \leq \beta.$$

En prenant pour Δ' une parallèle à Δ, on voit donc que si δ existe, la projection de δ sur Δ' est située sur le segment équiprobable σ de la projection de U sur Δ'.

Ou encore, δ doit se trouver sur la bande D' (éventuellement réduite à une droite) des perpendiculaires à Δ' menées par les points du segment équiprobable σ.

Mais en général, il n'existe pas de point qui soit commun aux bandes D' correspondant à toutes les directions Δ'.

Cependant il y a des cas particuliers (cependant assez généraux) où l'on peut établir l'existence de positions équiprobables.

Supposons que U ait partout une densité de probabilité.

Prenons d'abord le cas où celle-ci est positive à l'intérieur d'une région V bornée et d'un seul tenant et nulle en dehors. Alors la projection X de U sur une droite Δ' a aussi une densité de probabilité (linéaire) et le segment équiprobable de X sera toujours réduit à un point et la bande D' à une droite. En général, les droites D' ne seront pas concourantes et il n'y aura pas de position centrale. *Lorsqu'il y en a une, elle est unique.*

Plaçons-nous dans le cas particulier où la densité de probabilité est *constante* dans V. Alors il est clair qu'une droite D' est une droite qui sépare V en *deux aires égales*. S'il y a une position centrale δ, deux droites voisines passant par δ ne pourront diviser chacune V en deux parties égales que si elles se coupent à l'intérieur de V, découpant dans V deux triangles curvilignes d'aires égales. Ainsi δ doit être dans V et si les deux droites font un angle très petit les côtés de ces triangles issus de O devront être sensiblement égaux. En faisant tendre cet angle vers zéro, on voit que U ne peut, dans le cas actuel, avoir une position centrale que si V a un centre O de symétrie.

Alors ce centre O sera effectivement la position équiprobable de U. En effet, soit LL' la perpendiculaire à Oλ en O. Le cercle de centre λ, rayon λO, appartient au demi-plan W limité par LL' du côté de λ.

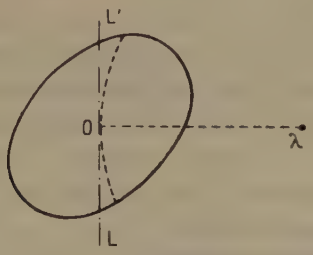


Fig. 5.

Donc

$$\{\text{Prob}[(U, \lambda) < (O, \lambda)]\} \leq \{\text{Prob}[U \text{ appartient à } W]\} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$(o, \lambda) \leq \overline{(U, \lambda)}$$

comme il le fallait.

Extension au cas d'un espace euclidien. — Plus généralement, supposons que U soit choisi au hasard dans un espace euclidien à n dimensions $\mathcal{D}_n$, mais que U soit borné stochastiquement. La méthode et les résultats précédents s'étendent à ce cas. On voit comme plus haut que s'il existe une position centrale $\grave{o}$ du point aléatoire U dans $\mathcal{D}$, elle se trouve dans la région D' balayée par les plans perpendiculaires à une direction Δ', qui coupent Δ' sur le segment équiprobable de la projection de U sur Δ.

En général, il n'y aura aucun point commun aux régions D' qui correspondent aux diverses directions Δ' et par suite pas de position centrale de U.

Mais cependant une telle position centrale peut exister. Si par exemple U a une densité de probabilité constante dans une région bornée V d'un seul tenant et nulle hors de V, alors pour que U ait une position centrale, il faut et il suffit que V ait un centre de symétrie O et alors O est l'unique position centrale.

Dominante.

Soit U un élément aléatoire de nature quelconque. Nous dirons encore ici, provisoirement, pour abréger le langage, que la loi de probabilité de U est discontinue s'il existe au moins une position de U dont la probabilité est positive. Comme on l'a vu, pages 215, 216, il ne peut y avoir qu'un ensemble dénombrable $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ de ces positions; soient $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ leurs probabilités; la borne supérieure P des p_n est atteinte pour au moins l'un des p_n et en tout cas pour un nombre fini d'entre eux $p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_r}$. Une extension naturelle

de la notion de dominante d'un *nombre* aléatoire consiste à appeler dominantes d'un élément aléatoire U de nature quelconque, mais à loi de probabilité discontinue, les positions les plus probables de U, c'est-à-dire chacune des positions $u_{h_1}, u_{h_2}, \ldots, u_h$ qui sont prises par U avec la probabilité maximum P. Chacune de ces positions pourra être représentée par le symbole $\hat{U}$.

On observera que cette définition ne suppose pas que l'espace où U est choisi au hasard soit distancié. Étudions maintenant les relations de cette définition avec celle des valeurs typiques $\mathfrak{T}U$ qu'on obtient en appliquant la définition générale de la page 229 au cas où l'on prend pour valeur typique T d'un *nombre* aléatoire N, une dominante $\hat{N}$ de N. Ici il nous faut au contraire supposer que U est choisi dans un espace distancié.

Pour une raison qui sera expliquée plus loin nous appellerons dominante *au sens strict* d'un élément U pris au hasard dans un espace *distancié* $\mathcal{D}$, tout élément certain φ de $\mathcal{D}$ tel que

$$(\varphi, \lambda) \leq \widehat{(U, \lambda)},$$

pour tout élément certain λ de $\mathcal{D}$.

L'étude que nous avons faite de cette inégalité dans le cas où U est un nombre, dans le Mémoire cité plus haut (en note, p. 229), ayant montré que le cas où il y a plusieurs dominantes est assez compliqué et beaucoup moins intéressant, même dans ce cas simple, nous n'examinerons ici que le cas où U n'a qu'une dominante au sens ordinaire, soit u_h.

Le nombre aléatoire (U, λ) prend les valeurs (u_j, λ) avec des probabilités positives. Quand ces valeurs sont différentes, il est clair que (U, λ) a une dominante unique (u_h, λ) et l'on doit avoir

$$(\varphi, \lambda) \leq (u_h, \lambda).$$

Mais il peut arriver que plusieurs des nombres (u_j, λ) soient égaux à un même nombre

$$r = (u_{h_1}, \lambda) = (u_{h_2}, \lambda) = \ldots$$

Dans ce cas (U, λ) prendra la valeur r avec la probabilité $p_{h_1} + p_{h_2} + \ldots$ qui pourra être supérieure à P.

Pour éviter cette circonstance, choisissons un nombre ε positif arbitraire et prenons λ à distance de u_h inférieure à ε. En général, on pourra le faire de façon que les distances $(\lambda, u_1), (\lambda, u_2), \ldots$ autres que (λ, u_h) soient différentes (1). Alors on aura

$$\widehat{(U, \lambda)} = (u_h, \lambda) < \varepsilon,$$

(1) Il peut arriver que ceci n'ait pas lieu pour des espaces distanciés singuliers. Par exemple, si dans $\mathcal{D}$, on prenait $(x, y) = 1$ ou 0 suivant que x et y sont distincts ou non, (x, y) vérifierait les

d'où si φ existe

$$(\varphi, \lambda) < \varepsilon,$$

et par suite

$$(\varphi, u_h) \leq (\varphi, \lambda) + (u_h, \lambda) < 2\varepsilon,$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

Donc *si φ existe, c'est la dominante*. Mais nous avons donné dans le Mémoire cité page 229 des exemples où une dominante unique existe et où φ n'existe pas. Ce sont les raisons pour lesquelles quand φ existe, nous l'appellerons dominante au sens strict.

---

conditions imposées à une distance, page 212 et si l'on prenait $\varepsilon < 1$ et $(\lambda, u_h) < \varepsilon$, on aurait $\lambda = u_h$ et les (λ, u_j), autres que $(\lambda, u_h) = 0$, seraient égaux entre eux.

Mais si, *par exemple*, $\mathcal{O}$ est un espace euclidien à un nombre fini n de dimensions, et si les points u_h sont en nombre fini, le choix de λ de la façon indiquée est toujours possible.

En effet, cela revient à dire qu'il y a des points de $\mathcal{O}$ qui n'appartiennent à aucun des hyperplans $(\lambda, u_k) = (\lambda, u_j)$ et qui ne sont pas non plus limites de l'ensemble de ces hyperplans.

Même lorsque les u_i sont en nombre infini, la possibilité de choisir λ de la façon indiquée peut subsister.

Supposons par exemple que U reste dans un plan. On peut d'abord prendre pour abscisse de λ un nombre ξ différent de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$ de l'abscisse de u_h. Si λ était à égale distance de deux des points u_i, il appartiendrait à l'ensemble dénombrable des perpendiculaires aux segments $u_i u_j$ en leurs milieux : ξ étant choisi, l'ordonnée η de λ ne pourrait donc prendre qu'un ensemble dénombrable de valeurs η_1, η_2, ... Il suffira alors de choisir pour η un nombre différent de η_1, η_2, ... et différant de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$ de l'ordonnée de u_h, ce qui est toujours possible.

LA

STRUCTURE DES p-GROUPES DE SYLOW

DES

GROUPES SYMÉTRIQUES FINIS

PAR M. LÉO KALOUJNINE.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire est consacré à l'étude des p-groupes de Sylow des groupes symétriques dont le degré est une puissance p^m d'un nombre premier p. Ces groupes, qui seront désignés par $\mathfrak{P}_m$, jouent, relativement aux p-groupes, un rôle analogue à celui que les groupes symétriques jouent relativement aux groupes finis.

Le fait de considérer seulement des groupes symétriques de degré p^m n'est pas une restriction artificielle. Il est facile de montrer que les p-groupes de Sylow d'un groupe symétrique quelconque sont des produits directs de tels groupes $\mathfrak{P}_m$. De façon précise, si le nombre entier n s'écrit dans le système de numération de base p :

$$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_m p^m,$$

un p-groupe de Sylow du groupe symétrique de degré n est isomorphe au produit direct

$$\mathfrak{P}_1^{a_1} \times \mathfrak{P}_2^{a_2} \times \ldots \times \mathfrak{P}_m^{a_m}.$$

On peut représenter les groupes $\mathfrak{P}_m$ par des systèmes, que j'appelle tableaux, de m polynomes, à $m-1$ variables, dont les coefficients sont des classes d'entiers, mod p (ou des éléments d'un champ de Galois de p éléments). Entre ces systèmes existe une loi de composition, définie par des opérations

rationnelles relativement simples. On peut ainsi traduire tout problème sur les groupes $\mathfrak{P}_m$ en un problème sur les polynomes, dans un champ de Galois. Il est vrai que, dans la plupart des cas, on aboutit ainsi à des problèmes qui sont loin d'être résolus. Cependant il est des cas pour lesquels on obtient une réponse satisfaisante et quasi définitive. C'est ainsi qu'on peut déterminer tous les sous-groupes caractéristiques d'un groupe $\mathfrak{P}_m$, et les caractériser par des systèmes de m entiers satisfaisant à certaines conditions.

Les résultats obtenus sont formulés dans les Chapitres IV et V, sous forme d'un certain nombre de théorèmes. Les démonstrations en sont basées sur quelques lemmes simples et sur quelques inégalités qui sont établis aux Chapitres II et III; le Chapitre I indiquant le principe de la représentation des groupes par des tableaux de polynomes. Si ces inégalités pouvaient être précisées, elles permettraient sans doute de trouver d'autres propriétés intéressantes des groupes $\mathfrak{P}_m$ et de leurs sous-groupes.

Cependant le problème de la détermination de tous les sous-groupes des groupes $\mathfrak{P}_m$ et de leur description précise semble exiger des moyens qui dépassent de loin nos connaissances actuelles. Il peut néanmoins être traité complètement dans le cas des groupes $\mathfrak{P}_2$. C'est ce que j'ai fait dans le Chapitre VI. Une grande partie des résultats que j'ai ainsi obtenus semble avoir été trouvée déjà par d'autres méthodes. J'ai pensé qu'il y avait quelque intérêt à les reprendre avec l'algorithme du présent travail. On peut voir mieux ainsi le mécanisme du calcul, et il n'est pas impossible de penser que leur étude pourra servir à une étude ultérieure des groupes $\mathfrak{P}_3$.

Dans un autre Mémoire qui sera publié ultérieurement, j'étudie quelques généralisations des idées dont je me suis servi dans le présent travail, en étudiant les groupes $\mathfrak{P}_z$ des tableaux formés par une suite infinie dénombrable de polynomes à coefficients dans des champs de Galois.

Le présent Mémoire et sa généralisation ont été présentés à l'Université de Paris comme Thèse de Doctorat. J'exprime toute ma gratitude à MM. É. Cartan, G. Darmois et A. Châtelet, qui ont bien voulu être membres du Jury. Je tiens à remercier plus spécialement M. Châtelet pour le vif intérêt qu'il a pris au présent travail et les conseils qu'il m'a prodigués, pour son développement et pour sa rédaction.

J'adresse encore mes remerciments à M. H. Cartan pour l'intérêt qu'il a pris à mes recherches et pour ses encouragements, et à M. Krasner dont les critiques et les conseils m'ont été précieux et m'ont permis d'améliorer mon exposé.

Je suis également très reconnaissant à MM. É. Cartan et J. Hadamard qui, à plusieurs reprises, ont présenté mes Notes sur ces sujets à l'Académie des Sciences, et plus spécialement à M. Paul Montel, qui n'a pas hésité à accueillir et faire publier une de mes Notes, pendant mon internement par la Gestapo, au camp de Compiègne; en acceptant ce travail dans les *Annales de l'École Normale*

Supérieure, il m'a donné une nouvelle preuve de confiance et d'estime dont je sens profondément tout le prix.

Notations. — Dans tout ce Mémoire, p désigne un *entier premier*, arbitraire, mais fixe, qui sera parfois supposé impair (Chap. V).

On désignera par :

G_p, le *corps des restes* des entiers rationnels, mod p (champ de Galois de p éléments);

E_s l'*espace vectoriel*, de dimension s sur G_p (puissance directe G_p^s);

X_s, de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_s$ (définies mod p), un *vecteur* de E_s.

Les *groupes* sont toujours désignés par des lettres gothiques majuscules : $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$, 3 éventuellement affectées d'indices.

Des éléments d'un groupe, ou des groupes eux-mêmes, entre accolades, $\{a, b, c\}$, $\{\mathfrak{E}_a \mathfrak{E}_c\}$, ... désignent le groupe engendré par ces éléments, ou par les éléments de ces groupes.

On emploie deux sortes de *commutateurs*, notés par des lettres entre parenthèses :

(a, b), commutateur des éléments a, b, égal à $aba^{-1}b^{-1}$;

$(\mathfrak{G}, \mathfrak{L})$, sous-groupe engendré par les commutateurs de tout élément de $\mathfrak{G}$ avec tout élément de $\mathfrak{L}$.

Les groupes abéliens de type $(p, p, \ldots, p)$ sont appelés *élémentaires*.

Le *groupe symétrique*, de degré n (et d'ordre $n!$) est désigné par $\mathfrak{S}_n$.

Le p-groupe de Sylow de $\mathfrak{S}_{p^m}$, défini à un isomorphisme près, est désigné par $\mathfrak{P}_m$.

On utilise les signes ordinaires de la théorie des ensembles :

$\subset$ inclusion stricte; $<$ inégalité stricte;

$\subseteq$ inclusion large; $\leq$ inégalité large.

CHAPITRE I.

LES TABLEAUX DE RANG m.

Considérons un ensemble de T de p^m éléments et le groupe des permutations $\mathfrak{S}_{p^m}$ de T, c'est-à-dire le groupe symétrique de degré p^m. La contribution de p dans son ordre $p^m!$ est $p^{p^{m-1}+p^{m-2}+\ldots+1}$; c'est l'ordre commun de ses p-groupes de Sylow, $\mathfrak{P}_m$ (tous isomorphes entre eux).

Étant donné un p-groupe quelconque $\mathfrak{G}$, il existe une représentation fidèle de $\mathfrak{G}$ comme groupe de permutations dont le degré est une puissance p^m. Alors, en raison des théorèmes de Sylow, dans tout $\mathfrak{P}_m$, il existe un sous-

groupe isomorphe à $\mathfrak{G}$. On voit donc combien l'étude des $\mathfrak{P}_m$ est importante pour la théorie générale des p-groupes.

J'ai réussi à construire explicitement, pour tout m, un p-groupe de Sylow $\mathfrak{P}_m$ de $\mathfrak{S}_{p^m}$ sous une forme qui en permet une étude approfondie. Cette construction et cette étude sont l'objet principal de ce travail.

Représentons T par l'ensemble des vecteurs X_m (de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$, du champ de Galois G_p, ou définies mod p) de l'espace E_m puissance directe G_p^m et désignons par $T_{x_1 x_2 \ldots x_s}$ l'ensemble des éléments de T qui, dans E_m, ont pour premières coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Une transformation ponctuelle biunivoque de l'espace E_m est, en même temps, une permutation des éléments de T, donc, à une similitude près, un élément du groupe $\mathfrak{S}_{p^m}$.

Considérons alors des opérations $\pi(a)$, $\pi\big(a(x_1)\big), \ldots, \pi\big(a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})\big)$, dans lesquelles $a(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ est une fonction dont la valeur est dans G_p et dont la variable est un vecteur X_s (de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_s$) de l'espace E_s. Elles sont définies comme suit :

1° $\pi(a)$ est une permutation circulaire des ensembles T_{x_1}, qui, à x_1 fait correspondre $x_1 + a$ (sur la figure c'est une rotation du grand cercle T, d'angle $2\pi\frac{a}{p}$).

2° $\pi\big(a(x_1)\big)$ est une permutation circulaire, variable avec x_1, de l'ensemble $T_{x_1 x_2}$ (de première coordonnée x_1), qui, à x_1, x_2 fait correspondre x_1, $x_2 + a(x_1)$. (Sur la figure ce sont p rotations des cercles T_{x_1}, d'angles respectifs $2\pi\frac{a(x_1)}{p}$.)

En général :

$\pi\big(a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})\big)$ est une permutation circulaire, variable avec X_{s-1}, de l'ensemble $T_{x_1 x_2 \ldots x_s}$ (de premières coordonnées X_{s-1}), qui, à $(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}, x_s)$ fait correspondre

$$\big(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}, x_s + a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})\big).$$

(Sur la figure ce serait p^{s-1} rotations des cercles $T_{x_1 x_2 \ldots x_{s-1}}$, d'angles respectifs $2\pi\frac{a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})}{p}$.)

Le produit α des permutations π

$$\pi\big(a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})\big), \ \ldots, \ \pi\big(a(x_1)\big)\,\pi(a)$$

(dans l'ordre droite gauche) est une transformation ponctuelle de E_m (ou une

permutation de T) qui est représentée par un *tableau* A_m (ou simplement A), dit de *rang m*,

$$A = \begin{pmatrix} a \\ a(x_1) \\ \cdots \\ a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) \end{pmatrix} = |\, a, a(x_1), a(x_1, x_2), \ldots, (x_1, \ldots, x_{m-1})\,|.$$

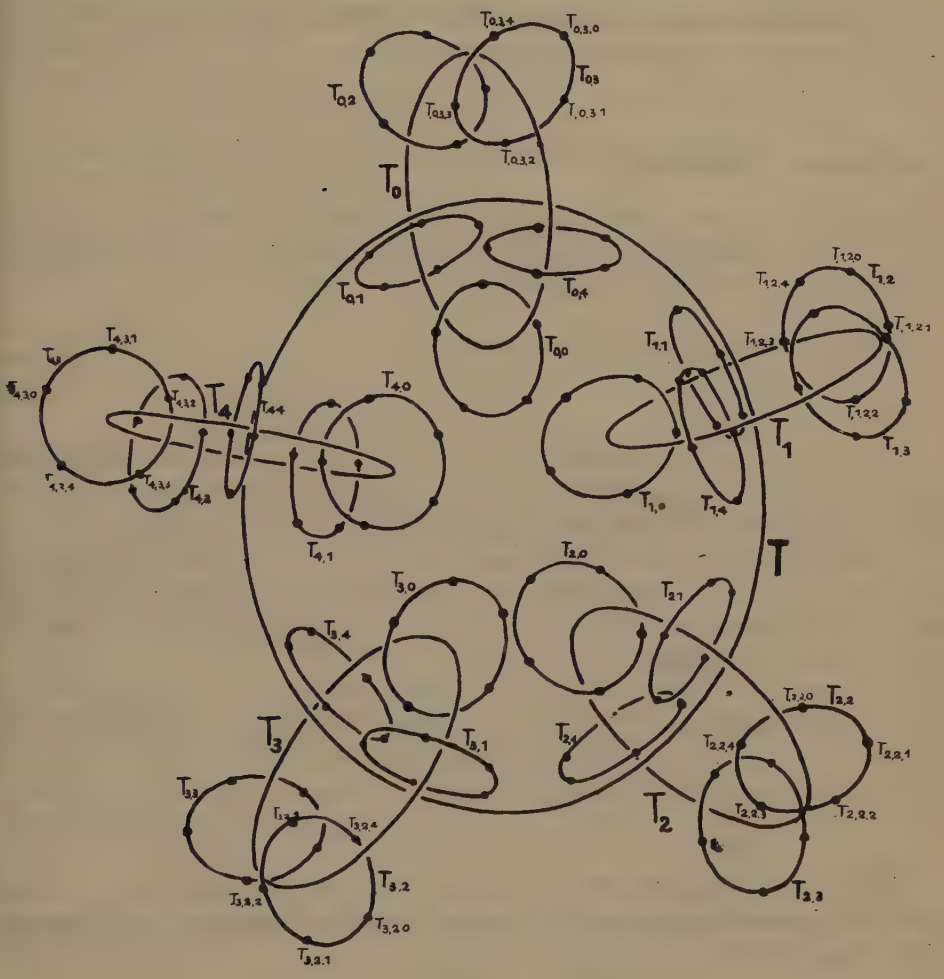


Fig. 1.

Les fonctions $[A]_s = a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})$ seront appelées les coordonnées de la transformation α, ou du tableau A, et l'on désignera par A_s le tableau de rang s, dont les coordonnées sont égales aux s premières coordonnées de α. Le nombre de fonctions $a(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ étant p^{p^s}, le nombre de transformations α est $p^{p^{m-1}+p^{m-2}+\ldots+1}$.

On vérifie immédiatement que la loi de composition de deux tableaux (ou transformations) est :

A. de coordonnées $a(x_1, x_2, \ldots, x_s)$; B. de coordonnées $b(x_1, x_2, \ldots, x_s)$: AB. (B, puis A) a pour coordonnées (s de 0 à $m-1$)

$$(1.1)\quad a(x_1, x_2, \ldots, x_s) + b\big(x_1 - a,\ x_2 - a(x_1),\ \ldots,\ x_s - a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})\big).$$

La transformation unité est représentée par un tableau de coordonnées toutes nulles. L'inverse du tableau a pour coordonnées

$$(1.2)\quad -a\big(x_1 + a,\ x_2 + a(x_1 + a),\ \ldots,\ x_s + a\big(x_1 + a,\ x_2 + a(x_1 + a),\ \ldots\big)\big).$$

Il en résulte la propriété :

Théorème I. — *Les transformations α forment un groupe $\mathfrak{P}_m$, d'ordre $p^{p^m + p^{m-1} + \cdots + 1}$, isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{p^m}$, notamment à un p-groupe de Sylow de $\mathfrak{S}_{p^m}$ (puisqu'il a le même ordre).*

Un tableau sera dit *de profondeur r* lorsque

$$[A]_s = 0, \qquad \text{pour } s \leq r \qquad \text{et} \qquad [A]_{r+1} \neq 0.$$

Les tableaux dont la profondeur est au moins égale à r forment un groupe qui est isomorphe au produit direct de p^r groupes isomorphes à $\mathfrak{P}_{m-r}$. Ce groupe, qui est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{P}_m$, sera désigné par $\mathfrak{D}_r$.

On peut toujours représenter une fonction $a(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ par un polynome en $x_1, x_2, \ldots, x_s$, à coefficients dans G_p et dans lesquels les exposants de chaque x_i ne sont pas supérieurs à $p-1$. Il suffit d'appliquer la formule d'interpolation de Lagrange

$$(1.3)\quad a(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_{d_i \in G_p} a(d_1, d_2, \ldots, d_s) \frac{x_1 - x_1'}{x_1 - d_1} \frac{x_2 - x_2''}{x_2 - d_2} \cdots \frac{x_s - x_s''}{x_s - d_s}$$

$$= \sum_{0 \leq i_\alpha \leq p-1} c_{i_1 i_2 \ldots i_s} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_s^{i_s}.$$

Dans l'anneau des polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_s$, qu'on note $G_p(x_1, \ldots, x_s)$, deux polynomes représentent la même fonction, lorsqu'ils sont congrus relativement à l'idéal

$$I_s = (x_1^p - x_1, x_2^p - x_2, \ldots, x_s^p - x_s).$$

Donc la fonction représentée par un polynome ne change pas quand on remplace chaque exposant d'une variable par son plus petit reste positif non nul (mod $p-1$). Un polynome où les exposants des variables sont tous ainsi rendus aux plus égaux à $p-1$ sera appelé *réduit* et nous conviendrons, dans la suite, de représenter les coordonnées d'un tableau par des polynomes réduits.

La multiplication se fera suivant la règle indiquée, en mettant les résultats des calculs sous forme réduite.

Il peut être commode d'employer un autre mode d'écriture des lois de composition (1.1) et (1.2), en particulier dans des raisonnements et des démonstrations par récurrence sur m. Considérons un vecteur X_{m-1} de l'espace E_{m-1} et un tableau A_{m-1}, de rang $m-1$, de coordonnées $a(x_1, x_2, \ldots, x_s)$. Nous noterons $X_{m-1}^{A_{m-1}}$ la transformation de l'espace E_{m-1}, associée à A_{m-1}, et définie par les relations

$$x_i^{A_{m-1}} = x_i - a(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}) \qquad (i \text{ de } 1 \text{ à } m-1). \tag{1.4}$$

Un tableau de rang m étant alors représenté par $|A_{m-1}, a(X_{m-1})|$, les lois de composition sont exprimées par

$$[A_{m-1}, a(X_{m-1})][B_{m-1}, b(X_{m-1})] = [A_{m-1}B_{m-1}, a(X_{m-1}) + b(X_{m-1}^{A_{m-1}})], \tag{1.1}$$

$$[A_{m-1}, a(X_{m-1})]^{-1} = [A_{m-1}^{-1}, -a(X_{m-1}^{A_{m-1}^{-1}})]. \tag{1.2}$$

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES A COEFFICIENTS DANS G_p.

Dans ce Chapitre, je vais exposer quelques propriétés des fonctions, définies sur l'espace E_s, à valeurs dans G_p et représentées, comme il a été dit, par des polynomes réduits, relativement aux transformations $X_s^{A_s}$ de l'espace E_s, définies par les formules (1.4). Ces propriétés, résumées en quelques lemmes, constituent l'outil principal pour l'étude des groupes $\mathfrak{P}_m$.

Dans un polynôme réduit, nous rangerons les monômes (dissemblables), lexicographiquement, ou par *hauteur* : $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_s^{i_s}$ de hauteur supérieure à $x_1^{i'_1}x_2^{i'_2}\ldots x_s^{i'_s}$ si, dans la suite des différences $i_s - i'_s$, $i_{s-1} - i'_{s-1}$, $\ldots$, $i_1 - i'_1$, la première qui n'est pas nulle est positive. D'une façon plus précise, nous appellerons *hauteur du monome réduit*

$$x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_{s-1}^{i_{s-1}}x_s^{i_s},$$

les i au plus égaux à $p-1$, l'entier

$$h = i_s p^{s-1} + i_{s-1}p^{s-2} + \ldots + i_2 p + i_1 + 1 \leq p^s.$$

La comparaison précédente est équivalente à celle des entiers h, et deux monomes de même hauteur sont nécessairement semblables (ne différant que par leurs coefficients).

Dans un polynome

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \quad \text{ou} \quad f(X_s) \quad \text{ou} \quad f(X)$$

réduit, sans termes semblables, et ordonné par hauteur de ses monomes, le terme de plus grand hauteur h, dont le coefficient a_h n'est pas nul, sera appelé le *terme principal* et a_h sera le *coefficient principal* du polynome. La hauteur du terme principal sera appelée la *hauteur du polynome* et désignée par $h[f(X)]$.

Lemme 1. — *Le terme principal* (et, par suite, le coefficient principal et la hauteur) *d'un polynome reste invariant dans toute transformation* $X_s^{A_s}$, *du groupe* $\mathfrak{P}_s$.

Notamment

$$h[f(X^A)] = h[f(X)].$$

Corollaire. — *La hauteur de* $f(X) - f(X^A)$ *est inférieure à celle de* $f(X)$

$$h[f(X) - f(X^A)] < h[f(X)]. \tag{2.1}$$

Démonstration. — Nous poserons, pour abréger et provisoirement,

$$\overline{h}[f(X)] = h[f(X)] - 1;$$

il en résulte les relations

$$\overline{h}[f(X) + f'(X)] \leq \max(\overline{h}[f(X)], \overline{h}[f'(X)]); \tag{1}$$

$$\overline{h}[f(X) \times f'(X)] \leq \overline{h}[f(X)] + \overline{h}[f'(X)]. \tag{2}$$

La première relation, qui est également vraie pour la hauteur $h[f(X)]$, est évidente: elle permet de ne vérifier la seconde que pour des monomes (de coefficients 1)

$$M = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_s^{i_s}, \qquad M' = x_1^{i'_1} x_2^{i'_2} \dots x_s^{i'_s};$$

leur produit est

$$M M' = x_1^{\overline{i_1+i'_1}} x_2^{\overline{i_2+i'_2}} \dots x_s^{\overline{i_s+i'_s}};$$

la surligne indique qu'on a remplacé l'entier surligné par son plus petit reste positif (mod $p-1$). Les nombres à comparer sont alors

$$h[M] + \overline{h}[M'] = (i_1 + i'_1) + (i_2 + i'_2)p + \dots + (i_s + i'_s)p^{s-1};$$

$$h[M M'] = (\overline{i_1 + i'_1}) + (\overline{i_2 + i'_2})p + \dots + (\overline{i_s + i'_s})p^{s-1};$$

l'inégalité est manifeste. En outre, dans la relation (2), il n'y a égalité que si et seulement si, dans les produits des termes principaux, les sommes des exposants de chaque variable x_i ne dépassent pas $p-1$, et, par suite, ne donnent pas lieu à réduction. On dira, dans ce cas, que $f(X)$ et $f'(X)$ *se multiplient sans réduction*. D'après la propriété (1), il est manifeste que si deux polynomes se multiplient sans réduction, le terme principal du produit est égal au produit des termes principaux des facteurs.

Le lemme peut alors se démontrer par récurrence sur la hauteur; il est évident pour une hauteur égale à 1, le polynome étant alors une constante, qui

n'est pas modifiée par la transformation. Supposons-le vrai pour tout polynome de hauteur inférieure à h^*, que je désignerai, d'une façon générale, par $o(X)$, en sorte que

$$h[o(X^A)] = h[o(X)] < h^*.$$

Un polynome de hauteur h^* est alors une somme

$$f(X) = cM + o(X), \qquad M = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_s^{i_s};$$
$$c \not\equiv 0, \qquad h[M] = h^*.$$

Dans la transformation, les termes restent de hauteur inférieure à h^*, sauf le premier qui devient

$$(cM)^A = c(x_1 - a)^{i_1} \big(x_2 - a(x_1)\big)^{i_2} \dots \big(x_s - a(x_1, x_2, \dots, x_{s-1})\big)^{i_s};$$

c'est un produit de facteurs, dont les termes principaux sont, respectivement :

$$c, \quad x_1^{i_1}, \quad x_2^{i_2}, \quad \dots, \quad x_s^{i_s};$$

la multiplication se fait sans réduction, le terme principal en est leur produit, qui est cM, de hauteur h^*. Donc

$$(cM)^A = cM + o(X), \qquad f(X) = cM + o(X);$$

la propriété, vraie pour toute hauteur inférieure à h^*, le reste pour h^*.

Lemme 2. — *Pour tout polynome $f(X)$, de hauteur k, on peut trouver au moins une transformation* $A(\text{de } \mathfrak{P}_s)$, *telle que* $f(X) - f(X^A)$, qui est de hauteur inférieure à k, *soit effectivement de hauteur* $k - 1$.

Considérons d'abord un monome (de coefficient 1) et soit r le plus petit indice, tel que l'exposant i_r ne soit pas nul, de sorte que

$$M = x_r^{i_r} x_{r+1}^{i_{r+1}} \dots x_s^{i_s} \qquad i_r \not\equiv 0.$$

Formons alors le tableau A, (de profondeur $r - 1$), dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf celle de rang r qui est égale à

$$[A]_r = x_1^{p-1} x_2^{p-1} \dots x_{r-1}^{p-1}.$$

La transformation qu'il définit vérifie la propriété pour le monome, car

$$M - M^A = x_r^{i_r} x_{r+1}^{i_{r+1}} \dots x_s^{i_s} - (x_r - x_1^{p-1} x_2^{p-1} \dots x_{r-1}^{p-1})^{i_r} x_{r+1}^{i_{r+1}} \dots x_s^{i_s}$$
$$= i_r x_1^{p-1} x_2^{p-1} \dots x_{r-1}^{p-1} x_r^{i_r - 1} x_{r+1}^{i_{r+1}} \dots x_s^{i_s} + \text{termes de haut. inf.};$$

et la hauteur de cette différence est

$$1 + (p-1) + (p-1)p + \dots + (p-1)p^{r-2} + (i_r - 1)p^{r-1} + i_{r+1} p^r + \dots + i_s p^{s-1}$$
$$= (1 + i_r p^{r-1} + \dots + i_s p^{s-1}) - 1 = h[M] - 1.$$

Considérons alors un polynome de hauteur k

$$f(X) = cM + o(X), \qquad h[M] = k, \qquad h[o(X)] \leq k-1.$$

D'après le corollaire,

$$h[o(X) - o(X^A)] < h[o(X)] \leq k-1 = h[M - M^A],$$

de sorte que

$$h[f(X) - f(X^A)] = h[cM - cM^A + o(X) - o(X^A)] = k-1.$$

Remarque. — L'ensemble des polynomes dont la hauteur est au plus égale à un entier t, positif, est évidemment un module, qui sera désigné par $\mathfrak{F}_t$. D'autre part, si un module de polynomes contient au moins un polynome de de hauteur égale à chacun des entiers au plus égaux à t, il est égal à $\mathfrak{F}_t$. Le lemme 2 entraîne alors la conséquence suivante :

Corollaire. — *Si $f(X)$ est un polynome de hauteur t, les polynomes $f(X^A)$, où A est une transformation quelconque de $\mathfrak{P}_n$, engendrent le module $\mathfrak{F}_t$.*

Lemme 3. — *Tout polynome $f(X)$ et tout tableau* A, *de profondeur r, au plus égale à s vérifient l'inégalité*

$$h[f(X) - f(X^A)] \leq p^s - p^r. \tag{2.a}$$

Une application immédiate de l'inégalité (1), dans le cas des hauteurs, donne l'inégalité

$$h\big[\big(f(X)+f'(X)\big) - \big(f(X^A)+f'(X^A)\big)\big] = h\big[\big(f(X)-f(X^A)\big) + \big(f'(X) - f'(X^A)\big)\big],$$
$$\leq \operatorname{Max}\big(h[f(X)-f(X^A)],\, h[f'(X)-f'(X^A)]\big).$$

Elle montre qu'il suffit de démontrer le lemme pour un monome quelconque (de coefficient 1)

$$M = x_1^{i_1} \dots x_s^{i_s}.$$

Effectuons une transformation A, de profondeur r

$$M^A = x_1^{i_1} \dots x_r^{i_r}\big(x_{r+1} - a(x_1, \dots, x_r)\big)^{i_{r+1}} \dots \big(x_s - a(x_1, \dots, x_{s-1})\big)^{i_s},$$

formons la différence, c'est une somme de termes de la forme

$$M_J = C_{i_r}^{j_{r+1}} \dots C_{i_s}^{j_s} x_1^{i_1} \dots x_r^{i_r} x_{r+1}^{i_{r+1}-j_{r+1}} a(x_1, \dots, x_r)^{j_{r+1}} \dots x_s^{i_s-j_s} a(x_1, \dots, x_{s-1})^{j_s};$$

les premiers facteurs sont les coefficients du binome; les indices $j_{r+1}, \dots, j_s$, constituant l'indice complexe J, sont les divers systèmes de valeurs non toutes nulles, telles que $j_{r+u} \leq i_{r+u}$. Dans un terme M_J, appelons v le plus grand indice tel que j_v ne soit pas nul; le seul facteur qui contient x_v est $x_v^{i_v - j_v}$, dont

l'exposant est au plus égal à $p-2$. La hauteur de M_i ne peut donc pas dépasser celle du monome

$$x_1^{p-1}\dots x_r^{p-2}\dots x_s^{p-1},$$

c'est-à-dire que

$$h(M_i)\leq 1+(p-1)+(p-1)p+\dots+(p-1)p^{s-1}$$
$$+\left((p-2)p^{r-1}+(p-1)p^{r}\right)=p^s+p^{r-1}\leq p^s+p^r;$$

d'après la propriété (1), cette inégalité subsiste pour la somme des M_i.

L'inégalité ainsi démontrée ne peut pas être améliorée, c'est ce qu'exprime la propriété suivante :

Lemme 4. — *Pour tout tableau* A, *de profondeur* r (*au plus égale à* s), *on peut trouver au moins un polynome* $f(X)$, *tel que*

$$h[f(X)-f(X^A)]=p^s+p^r. \tag{2.3}$$

Étudions d'abord l'effet de la transformation

$$A=[0,\dots,0,a(x_1),\dots,x_r),\dots,a(x_1,\dots,x_{s-1})],\qquad a(x_1,\dots,x_r)\neq 0$$

sur le monome $M_1=x_r^{p-1}\dots x_s^{p-1}$. Il est manifeste que la différence

$$M_1-M_1^A=x_{r+1}^{p-1}\dots x_s^{p-1}-\left(x_{r-1}-a(x_1,\dots,x_r)\right)^{p-1}\dots\left(x_s-a(x_1,\dots,x_{s-1})\right)^{p-1}$$

contient des termes non nuls de la forme

$$m(x_1,\dots,x_r)x_{r+1}^{p-2}x_{r+2}^{p-1}\dots x_s^{p-1},$$

où les $m(x_1,\dots,x_r)$ sont certains monomes; choisissons celui de hauteur maximum: si ses exposants sont $j_1,\dots,j_r$, le monome

$$M=x_1^{p-1-j_1}\dots x_r^{p-1-j_r}.M_1$$

vérifie la propriété énoncée.

Cherchons maintenant à résoudre l'*équation fonctionnelle*

$$f(X)-f(X^A)=g(X); \tag{2.4}$$

où $f(X)$ est un polynome inconnu, les données étant la transformation A et le polynome second membre $g(X)$. Le nombre de solutions, s'il en existe, est évidemment égal à celui des solutions de l'équation sans second membre

$$f(X)-f(X^A)=0 \qquad \text{ou} \qquad f(X)=f(X^A), \tag{2.5}$$

dont une condition de possibilité est manifestement fournie par la considération des domaines de transitivité de A.

Lemme 5. — *Pour qu'un polynome* $h(X)$ *soit solution de l'équation* (2.5), sans second membre, *il faut et il suffit que* $h(X)$ *soit constant, pour tous les points* X, *d'un domaine de transitivité de* A.

Le nombre de solutions est, par suite, $p^{t(A)}$; $t(A)$ nombre des domaines de transitivité. Dans le cas particulier d'une transformation A, d'ordre p^s, son domaine de transitivité est l'espace E, lui-même et les solutions de (2.5) sont les fonctions $h(X) = \text{const.}$

Pour étudier l'équation (2.4), avec second membre, définissons d'abord une opération de sommation dans un sous-ensemble R de E,

$$\mathbf{S}_R[f(X)] = \sum f(X_i), \quad \text{tous} \quad X_i \in R. \tag{2.6}$$

Il en résulte, pour une sommation étendue à un domaine T(A) de transitivité de A,

$$\mathbf{S}_{T(A)}[f(X^A)] = \mathbf{S}_{T(A)}[f(X)]. \tag{2.7}$$

On peut alors énoncer une condition de possibilité de l'équation (2.4) (avec second membre) :

Lemme 6. — *Pour que l'équation* (2.4) *ait des solutions, il faut et il suffit que*

$$\mathbf{S}_{T(A)}[g(X)] = 0$$

pour tout domaine T(A), *de transitivité de* A.

La condition est *nécessaire*, car, si $f_1(X)$ est une solution de (2.4), pour tout domaine T(A), on a

$$\mathbf{S}_{T(A)}[g(X)] = \mathbf{S}_{T(A)}[f_1(X) - f_1(X^A)] = \mathbf{S}_{T(A)}[f_1(X)] - \mathbf{S}_{T(A)}[f_1(X^A)] = 0.$$

La condition est *suffisante*. Choisissons dans chaque domaine $T_i(A)$ de transitivité de A, un représentant X_i; tout point de E, est de la forme $X_i^{A^n}$. Nous déterminerons une solution $f_1(X)$ par les conditions

$$f_1(X_i) = 0, \quad f_1(X_i^{A^n}) = -g(X_i) - g(X_i^A) \dots - g(X_i^{A^{n-1}});$$

ces conditions sont compatibles, car si k est l'ordre de A,

$$f_1(X_i) - f_1(X_i^{A^k}) = \mathbf{S}_{T(A)}[-g(X)] = 0;$$

en outre, pour chaque n et pour chaque i,

$$f_1(X_i^{A^n}) - f_1\left((X_i^{A^n})^A\right) = g(X^{A^n}).$$

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES TABLEAUX.

Dans un tableau A, de rang m on représentera la hauteur de la coordonnée de rang u, de A, par la notation abrégée

$$|\mathrm{A}|_u = h\big[[\mathrm{A}]_u\big] = h[a(x_1, \ldots, x_{u-1})], \qquad 0 \leq |\mathrm{A}|_u \leq p^{u-1}.$$

Le système de ces hauteurs (u de 1 à m)

$$< |\mathrm{A}|_1, |\mathrm{A}|_2, \ldots, |\mathrm{A}|_m >,$$

sera appelé l'*indicatrice* du tableau A et désigné par $|\mathrm{A}|$. La condition pour qu'un tableau soit de profondeur r est que le premier terme non nul de son indicatrice soit $|\mathrm{A}|_{r-1}$, de rang $r+1$.

On définira une *comparaison* (partielle) des indicatrices des tableaux, éléments de $\mathfrak{P}_m$, par la condition

$$|\mathrm{A}| \leq |\mathrm{B}| \quad \text{équivalent à} \quad |\mathrm{A}|_u \leq |\mathrm{B}|_u \quad (u \text{ de } 1 \text{ à } m).$$

Ces notations précisées, nous allons indiquer quelques propriétés :

du *commutateur :* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{ABA}^{-1}\mathrm{B}^{-1}$, de deux tableaux A et B;
du *transmué :* $\mathrm{A}^{\mathrm{B}} = \mathrm{BAB}^{-1}$, du tableau A par B.

Propriétés du commutateur. — En utilisant la notation récurrente de la fin du Chapitre I et les formules de multiplication et d'inversion qui en résultent, on obtient

$$(3.1) \quad (\mathrm{A}_{u-1}, \mathrm{B}_{u-1}) = [\mathrm{A}_u \mathrm{B}_u \mathrm{A}_u^{-1} \mathrm{B}_u^{-1}, a(\mathrm{X}_u) - a(\mathrm{X}_u^{\mathrm{A}_u \mathrm{B}_u \mathrm{A}_u^{-1}}) + b(\mathrm{X}_u^{\mathrm{A}_u}) - b(\mathrm{X}_u^{\mathrm{A}_u \mathrm{B}_u \mathrm{A}_u^{-1} \mathrm{B}_u^{-1}})].$$

La valeur de la coordonnée de rang $u+1$ est, par suite,

$$(3.2) \quad [(\mathrm{A}, \mathrm{B})]_{u+1} = a(\mathrm{X}_u) - a(\mathrm{X}_u^{\mathrm{A}_u \mathrm{B}_u \mathrm{A}_u^{-1}}) + b(\mathrm{X}_u^{\mathrm{A}_u}) - b(\mathrm{X}_u^{\mathrm{A}_u \mathrm{B}_u \mathrm{A}_u^{-1} \mathrm{B}_u^{-1}}).$$

La coordonnée de rang 1 est manifestement nulle. L'application du lemme I aux deux derniers termes, considérés comme des transformés par la transformation A_u, donne l'égalité

$$h\big[b(\mathrm{X}_u^{\mathrm{A}_u}) - b(\mathrm{X}_u^{\mathrm{A}_u \mathrm{B}_u \mathrm{A}_u^{-1} \mathrm{B}_u^{-1}})\big] = h\big[b(\mathrm{X}_u) - b(\mathrm{X}_u^{\mathrm{B}_u \mathrm{A}_u^{-1} \mathrm{B}_u^{-1}})\big];$$

il en résulte l'inégalité fondamentale

$$(3.3) \quad |(\mathrm{A}, \mathrm{B})|_{u+1} \leq \max.\Big(h\big[a(\mathrm{X}_u) - a(\mathrm{X}_u^{\mathrm{A}_u \mathrm{B}_u \mathrm{A}_u^{-1}})\big], h\big[b(\mathrm{X}_u) - b(\mathrm{X}_u^{\mathrm{B}_u \mathrm{A}_u^{-1} \mathrm{B}_u^{-1}})\big]\Big);$$

il y a notamment égalité quand les deux hauteurs du second membre sont différentes.

Par application du corollaire 1, on obtient l'inégalité (où l'indice $u+1$ est remplacé par u)

$$|(A, B)|_u < \text{Max.}\big(h[a(X_{u-1})], h[b(X_{u-1})]\big) = \max.(|A|_u, |B|_u). \tag{3.4}$$

Il y a naturellement exception si les hauteurs du second membre sont nulles; alors

$$|A|_u = |B|_u = |(A, B)|_u.$$

On peut préciser l'inégalité (3.3), quand on fait sur A et B des hypothèses complémentaires.

1° A *et* B *de profondeur* r; en prenant $u \geq r$, l'application du lemme 3 aux termes du second membre de (3.3) donne

$$h[a(X_u) - a(X_u^{A_u B_u A_u^{-1}})] \leq p^u - p^r, \qquad h[b(X_u) - b(X_u^{B_u A_u^{-1} B_u^{-1}})] \leq p^u - p^r$$

et

$$|(A, B)|_{u+1} \leq p^u - p^r, \qquad r \leq u \leq m-1. \tag{3.5}$$

En particulier $|(A, B)|_{r+1}$ est nul : le commutateur de deux tableaux de profondeur r est un tableau de profondeur au moins égale à $r+1$.

2° A *de profondeur* r *et* B *quelconque :* le même calcul donne l'inégalité

$$|(A, B)|_{u-1} \leq \max.(|A|_{u-1} - 1, p^u - p^r). \tag{3.6}$$

Propriétés du transmué. — Avec des calculs analogues, on obtient les résultats

$$|BAB^{-1}|_{u+1} = a(X_u^{B_u}) + b(X_u) - b(X_u^{B_u A_u B_u^{-1}}). \tag{3.7}$$

La hauteur du premier terme du second membre est égale à (lemme 1)

$$h[a(X_u^{B_u})] = h[a(X_u)] = |A|_u;$$

et il en résulte l'inégalité [analogue à (3.3)]

$$|BAB^{-1}|_u \leq \max.\Big(|A|_u, h[b(X_u) - b(X_u^{B_u A_u B_u^{-1}})]\Big); \tag{3.8}$$

il y a notamment égalité quand les deux hauteurs du second membre sont différentes.

Considérons encore le cas particulier : A *de profondeur* r, B *quelconque :* l'inégalité devient [analogue à (3.6)]

$$|BAB^{-1}|_{u+1} = \max.(|A|_{u+1}, p^u - p^r). \tag{3.9}$$

Dans ce cas, on peut préciser l'expression (3.7), suivant le terme du second membre qui donne la valeur du maximum.

Premier cas. — Supposons

$$|\mathrm{A}|_{u+1} > p^u - p^r, \qquad \text{donc} \quad |\mathrm{BAB}^{-1}|_{u+1} = |\mathrm{A}|_{u+1}; \tag{3.10}$$

on peut alors calculer le *terme principal* du transmué; il est égal à celui du premier terme du second membre de (3.7), puisque

$$h[b(\mathrm{X}_u) - b(\mathrm{X}_u^{\mathrm{B}_u \mathrm{A}_u \mathrm{B}_u^{-1}})] \leq p^u - p^r < |\mathrm{A}|_{u+1}.$$

Mais, d'après le lemme 1, le terme principal de $a(\mathrm{X}_u^{\mathrm{B}_u})$ est égal à celui de $a(\mathrm{X}_u)$, donc de $[\mathrm{A}]_{u+1}$; d'où, en remplaçant $u+1$ par u,

$$\text{terme pr. } [\mathrm{BAB}^{-1}]_u = \text{terme pr. } [\mathrm{A}]_u. \tag{3.11}$$

Deuxième cas. — Supposons

$$|\mathrm{A}|_{u+1} \leq p^u - p^r.$$

D'après le lemme 4, il existe effectivement un polynome $b(\mathrm{X}_u)$ tel que

$$h[b(\mathrm{X}_u) - b(\mathrm{X}_u^{\mathrm{A}_u})] = p^u - p^r.$$

Construisons le tableau B_1, dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf $[\mathrm{B}_1]_{u+1} = b(\mathrm{X}_u)$; l'égalité (3.7) devient

$$[\mathrm{B}_1 \mathrm{A} \mathrm{B}_1^{-1}]_{u+1} = a(\mathrm{X}_u) + b(\mathrm{X}_u) - b(\mathrm{X}_u^{\mathrm{A}_u}).$$

Le terme principal est; par hypothèse, de hauteur $p^u - p^r$, il ne peut être égal au terme de même hauteur dans $a(\mathrm{X}_u)$, terme qui est nul si $|\mathrm{A}|_{u+1} < p^u - p^r$, et qui, en tous cas, est modifié par le terme de cette hauteur dans $\left(b(\mathrm{X}_u) - b(\mathrm{X}_u^{\mathrm{A}_u})\right)$, qui lui, n'est pas nul. Dans ce deuxième cas, il existe donc une transformation B_1, telle que ($u+1$ étant remplacé par u)

$$\text{terme pr. } [\mathrm{B}_1 \mathrm{A} \mathrm{B}_1^{-1}]_u \neq \text{terme pr. } [\mathrm{A}]_u.$$

Il en résulte l'énoncé suivant :

Lemme 7. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le terme principal de la coordonnée de rang u, $[\mathrm{A}]_u$, d'un tableau* A, *de rang m et de profondeur r, ($r+1 \leq u \leq m$) soit invariant pour tous les automorphismes intérieurs* (transmutations) *du groupe $\mathfrak{P}_m$ est que la hauteur $|\mathrm{A}|_u$ soit supérieure à $p^{u-1} - p^r$.*

Il est évident que la transmutation par un tableau dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf celle de rang u, ne peut changer que les hauteurs des coordonnées de ce rang u. Cette remarque permet de démontrer le lemme suivant.

Lemme 8. — *Pour un tableau* A, *de profondeur r, il existe au moins un tableau* B, *tel que*

$$|\mathrm{BAB}^{-1}|_u \geq p^{u-1} - p^r, \qquad \text{tout} \quad u \geq r+1.$$

Pour chaque u, tel que $|A|_u < p^{u-1} - p^r$, choisissons, comme il a été fait dans la démonstration du lemme précédent, un tableau B_u, dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf celle de rang u, déterminée par

$$[B_u]_u = b_u(X_{u-1}); \qquad h[b_u(X_{u-1}) - b_u(X_{u-1}^{A_{u-1}})] = p^{u-1} - p^r.$$

Il suffit alors de prendre pour tableau B, le produit des B_u, l'ordre des facteurs n'important pas.

CHAPITRE IV.

SUITES CENTRALES ASCENDANTES ET DESCENDANTES.

Notions générales. — Dans un groupe $\mathfrak{G}$ quelconque, la *suite centrale ascendante* (S. C. A.) est la suite de sous-groupes, nécessairement caractéristiques, $\mathfrak{Z}_u$, chacun contenu dans le suivant, définis par la récurrence suivante :

$$\mathfrak{Z}_0 = 1 \quad (\text{unité de } \mathfrak{G}); \qquad \mathfrak{Z}_{u+1} \mid \mathfrak{Z}_u = \text{centre de } \mathfrak{G} \mid \mathfrak{Z}_u;$$

il est équivalent de définir $\mathfrak{Z}_{u+1}$ comme l'ensemble de tous les éléments B (de $\mathfrak{G}$), tels que les commutateurs de B avec tous les éléments A, de $\mathfrak{G}$ soient dans $\mathfrak{Z}_u$.

Théorème 2. — *Dans un p-groupe $\mathfrak{G}$, le dernier terme de la S. C. A. est le groupe $\mathfrak{G}$ lui-même.*

En effet, pour que $\mathfrak{Z}_{c+1} = \mathfrak{Z}_c$, il faut et il suffit que le centre de $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{Z}_c$ se se réduise à l'unité. Si $\mathfrak{G}$ est un p-groupe, il en est de même de $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{Z}_c$, qui doit comme son centre se réduire à l'unité. Car dans un p-groupe, d'ordre supérieur à 1, le centre est aussi d'ordre supérieur à 1.

La *suite centrale descendante* (S. C. D.) est encore une suite de sous-groupes, nécessairement caractéristiques (1), chacun contenant le suivant, définis par la récurrence suivante :

$$\bar{\mathfrak{Z}}_0 = \mathfrak{G}; \qquad \bar{\mathfrak{Z}}_{u+1} = (\mathfrak{G}, \bar{\mathfrak{Z}}_u)$$

(suivant la notation précisée, il faut entendre que $\bar{\mathfrak{Z}}_{u+1}$ est constitué par tous les commutateurs d'un élément de $\mathfrak{G}$ avec un élément de $\bar{\mathfrak{Z}}_u$).

Lemme 9. — *Dans un p-groupe le terme de rang u de la S. C. D. est contenu dans le terme de rang $c - u$ de la S. C. A.*

$$\bar{\mathfrak{Z}}_u \subseteq \mathfrak{Z}_{c-u};$$

c rang du dernier terme de S. C. A.

---

(1) On a seulement rappelé ici les propriétés élémentaires des S. C. A. et des S. C. D., dont certaines (comme le théorème 2), sont bien connues. On en trouvera un exposé détaillé dans le mémoire de Ph. Hall (4 de l'Index bib.).

Le lemme se démontre par récurrence sur le rang u; il est vrai pour $u = 0$, puisque $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_c$. Supposons-le vrai pour u, de sorte que

$$\mathfrak{Z}_u \supseteq \mathfrak{Z}_{c-u}: \qquad \mathfrak{Z}_{c-u+1} \supseteq \mathfrak{Z}_{c-u}.$$

Construisons le sous-groupe caractéristique $\mathfrak{Z}'_u$ avec les éléments de $\mathfrak{Z}_u$ et de $\mathfrak{Z}_{c-u-1}$; il vérifie les inclusions

$$\mathfrak{Z}_{c-u-1} \subseteq \mathfrak{Z}'_u; \qquad \mathfrak{Z}'_u \subseteq \mathfrak{Z}_{c-u};$$

il en résulte l'inclusion des groupes quotients

$$\mathfrak{Z}'_u \mid \mathfrak{Z}_{c-u-1} \subseteq \mathfrak{Z}_{c-u} \mid \mathfrak{Z}_{c-u-1}.$$

Le premier est contenu dans le centre du groupe $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{Z}_{c-u-1}$, de sorte que le commutateur

$$(\mathfrak{G} \mid \mathfrak{Z}_{c-u-1},\ \mathfrak{Z}'_u \mid \mathfrak{Z}_{c-u-1})$$

se réduit à l'unité. Par conséquent,

$$\mathfrak{Z}_{c-u-1} \supseteq (\mathfrak{G},\ \mathfrak{Z}'_u) \supseteq (\mathfrak{G},\ \mathfrak{Z}_u) = \mathfrak{Z}_{u+1}.$$

On en conclut notamment que

$$\mathfrak{Z}_c \subseteq \mathfrak{Z}_{c-c} \subseteq \mathfrak{Z}_0 = \text{unité de } \mathfrak{G}_n;$$

par suite, le dernier élément $\mathfrak{Z}_{c'}$, de la S. C. D. est égal à l'unité de $\mathfrak{G}$ et le rang c' est au plus égal au rang c du dernier terme de la S. C. A.

Lemme 10. — *Dans un p-groupe le terme de rang u de la S. C. A. est contenu dans le terme de rang $c' - u$ de la S. C. D.*

$$\mathfrak{Z}_u \supseteq \mathfrak{Z}_{c'-u}.$$

Le lemme se démontre encore par récurrence sur le rang u; il est vrai pour $u = 0$, puisque $\mathfrak{Z}_0 = \text{unité de } \mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_{c'}$. Supposons-le vrai pour u, de sorte que

$$\mathfrak{Z}_u \supseteq \mathfrak{Z}_{c'-u} = (\mathfrak{G},\ \mathfrak{Z}'_{c'-u-1}).$$

Construisons le sous-groupe caractéristique $\mathfrak{Z}''_{c'-u-1}$ avec les éléments de $\mathfrak{Z}_{c-u-1}$ et de $\mathfrak{Z}_u$. Il vérifie l'inclusion

$$(\mathfrak{G},\ \mathfrak{Z}''_{c'-u-1}) \subseteq \mathfrak{Z}_u,$$

de sorte que le commutateur des groupes quotients

$$(\mathfrak{G} \mid \mathfrak{Z}_u,\ \mathfrak{Z}''_{c'-u-1} \mid \mathfrak{Z}_u)$$

se réduit à l'unité. Donc le deuxième groupe est dans le centre du premier et il en résulte

$$\mathfrak{Z}_{u+1} \supseteq \mathfrak{Z}''_{c'-u-1} \supseteq \mathfrak{Z}_{c'-u-1}.$$

On en conclut notamment

$$\mathfrak{Z}_{c'} \supseteq \mathfrak{Z}_{c'-c'} = \mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{G};$$

le rang c du dernier terme de la S. C. A. est au plus égal à c', donc (tenant compte du résultat précédent), lui est égal.

Les résultats de ces deux lemmes entraînent la propriété :

Théorème 3. — *Dans un p-groupe $\mathfrak{G}$, le dernier terme de la S. C. D. est le groupe identique. Les deux suites ont le même nombre c de termes.*

Le nombre c est appelé la *classe* du p-groupe $\mathfrak{G}$.

On peut étendre la relation qui existe entre les termes successifs de la S. C. A. au cas d'un sous-groupe distingué quelconque. Dans un groupe $\mathfrak{G}$, nous appellerons *commutant d'un sous-groupe distingué*, quelconque $\mathfrak{H}$, le sous-groupe distingué $\mathfrak{H}^*$ tel que $\mathfrak{H}^* | \mathfrak{H}$ soit le centre de $\mathfrak{G} | \mathfrak{H}$.

Le commutant qu'on notera $)\mathfrak{G}, \mathfrak{H}($ est donc l'ensemble de tous les éléments B (de $\mathfrak{G}$), tels que les commutateurs de B avec tous les éléments A, de $\mathfrak{G}$ soient dans $\mathfrak{H}$. Dans la S. C. A., chaque terme est le commutant du précédent.

Etude du groupe $\mathfrak{P}_m$. Définition. — Nous appellerons *sous-groupe parallélotopique de $\mathfrak{P}_m$* (en abrégé G. P.) tout ensemble $\mathfrak{U}$ de ses éléments tel qu'il contienne tout tableau dont l'*indicatrice est au plus égale* à celle d'un de ses termes quelconque

$$A \in \mathfrak{U} \quad \text{et} \quad |X| \leq |A| \quad \text{entraînent} \quad X \in \mathfrak{U}.$$

L'ensemble $\mathfrak{U}$ est bien un groupe, car, en raison du lemme 1 (Chap. II) appliqué à la loi de composition (1.1) des tableaux, $\mathfrak{U}$ contient le produit de tout couple de ses éléments.

Pour chaque rang u (de 1 à m), déterminons le *maximum des hauteurs des coordonnées de rang u*, pour les tableaux de $\mathfrak{U}$, nous le noterons, par analogie avec les tableaux (Chap. III),

$$|\mathfrak{U}|_u = k_u = \text{Max.} |A|_u, \qquad A \in \mathfrak{U}, \qquad 0 \leq |\mathfrak{U}|_u \leq p^{u-1}.$$

Un groupe parallélotopique $\mathfrak{U}$ est manifestement déterminé par le système d'entiers

$$K = <k_1, k_2, \ldots, k_m>, \qquad k_u \leq p^{u-1};$$

qu'on appelle son *indicatrice* et qui sera désigné par

$$|\mathfrak{U}| = <\ldots |\mathfrak{U}|_u \ldots>.$$

Toujours, par analogie avec les tableaux, le groupe est dit de *profondeur r*, (Chap. I), quand le premier terme non nul de son indicatrice est de rang $r+1$.

Les G. P. ne sont pas en général des sous-groupes distingués, les lemmes 7 et 8 permettent de caractériser ceux qui le sont.

THÉORÈME 4. — *Pour qu'un* G. P. $\mathfrak{U}$ (de $\mathfrak{P}_m$), de profondeur r, *soit un sous-groupe distingué, il faut et il suffit que*

$$|\mathfrak{U}|_u \geq p^{u-1} - p^r; \qquad \text{pour tout } u, \quad r+1 \leq u \leq m.$$

Nous désignerons les G. P. distingués par l'abréviation G. P. I.; nous allons étudier quelques-unes de leurs propriétés pour aboutir à la conclusion remarquable que ce sont tous les sous-groupes caractéristiques de $\mathfrak{P}_m$.

THÉORÈME 5. — *Pour un G. P. I.* $\mathfrak{U}$, *de profondeur* s *et d'indicatrice*

$$< 0, \ldots, 0, k_{s+1}, \ldots, k_m >,$$

le commutateur $(\mathfrak{P}_m, \mathfrak{U})$ *est aussi un G. P. I. de profondeur* s *ou* $s+1$, *dont l'indicatrice*

$$< 0, \ldots, 0, k'_{s+1}, \ldots, k'_m >$$

est définie par

$$k'_u = \operatorname{Max}(k_u - 1, p^{u-1} - p^s) \qquad \text{pour} \quad u : s+1 \leq u \leq m.$$

En particulier la profondeur est s ou $s+1$, suivant que k_{s+1} est supérieur à 1, ou égal à 1.

Appelons $\mathfrak{U}'$ le G. P. I. dont l'indicatrice est construite par les conditions du théorème. Formons les commutateurs

$$(B, A) \in (\mathfrak{P}_m, \mathfrak{U}), \qquad B \in \mathfrak{P}_m, \quad A \in \mathfrak{U},$$

d'après la formule (3.6), A étant de profondeur au moins égale à s,

$$|(B, A)|_u \leq \operatorname{Max}(|A|_u - 1, \quad p^{u-1} - p^s) \leq \operatorname{Max}(k_u - 1, p^{u-1} - p^s) = k'_u.$$

D'après sa définition $\mathfrak{U}'$ contient donc ces commutateurs et par suite leur ensemble $(\mathfrak{P}_m, \mathfrak{U})$.

Réciproquement, montrons que $\mathfrak{U}'$ peut être engendré par des éléments de $(\mathfrak{P}_m, \mathfrak{U})$. Quels que soient u et h, vérifiant les conditions

$$s+1 \leq u \leq m, \qquad 0 \leq h \leq k_u;$$

$\mathfrak{U}$ contient un tableau $A(u, h)$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf celle de rang u, égale à

$$[A(u, h)]_u = a(X_{u-1}), \qquad h[a(X_{u-1})] = h.$$

En outre, d'après le lemme 2, on peut trouver un tableau B_{u-1}, élément de $\mathfrak{P}_{u-1}$ tel que

$$h[a(X_{u-1}) - a(X_{u-1}^{B_{u-1}})] = h - 1.$$

Le commutateur des tableaux

$$A(u,h)=[0,\dots 0\ a(X_{u-1}),0,\dots 0],\qquad B=[B_{u-1},0,\dots,0],\qquad A\in\mathfrak{U},\qquad B\in\mathfrak{P}_m$$

calculé par la formule (3.1) est

$$C(u,h)=[0,\dots,0,\ a(X_{u-1})-a(X_{u-1}^{B_{u-1}}),0,\dots 0],\qquad |C(u,h)|_u=h-1.$$

D'autre part $\mathfrak{U}$ contient un tableau

$$A'=[0,\dots,0,f(X_s),0,\dots,0]$$

dont toutes les coordonnées, sauf celle de rang $s+1$, sont nulles. D'après le lemme 4, on peut, pour tout u vérifiant la condition précédente, trouver un polynome $e(X_{u-1})$ tel que

$$h[e(X_{u-1})-e(X_{u-1}^{A'})]=p^{u-1}-p^s.$$

Le commutateur de A' et $B'=[0,e(X_{u-1}),0]$ appartenant à $\mathfrak{P}_m$ est

$$D(u)=[0,\dots,0,\ e(X_{u-1})-e(X_{u-1}^{A'}),0,\dots,0],\qquad |D(u)|_u=p^{u-1}-p^s.$$

Il est manifeste que les tableaux $C(u,h)$ et $D(u)$ engendrent le groupe $\mathfrak{U}'$ qui est ainsi contenu dans $(\mathfrak{P}_m,\mathfrak{U})$.

Corollaire. — *Le groupe quotient* $\mathfrak{U}:(\mathfrak{P}_m,\mathfrak{U})$ *est un groupe élémentaire dont le nombre k d'invariants est le nombre de coordonnées de rang u, de* $\mathfrak{U}$, *pour lesquelles* $|\mathfrak{U}|_u>p^{u-1}-p^s$, (*s profondeur du G. P. I.* $\mathfrak{U}$), *son ordre est* p^k.

Le groupe $\mathfrak{P}_m$ étant lui-même un G. P. I., il résulte du théorème 5, que tout sous-groupe de la S. C. D. est aussi un G. P. I. Ce résultat peut être complété comme suit :

Théorème 6. — *Le terme* $\mathfrak{Z}_r$, *de rang r, de la S. C. D. est le G. P. I. dont l'indicatrice est*

$$(6.1)\qquad \mathfrak{Z}_r=<k_1^{(r)},k_2^{(r)},\dots,k_m^{(r)}>,\qquad k_u^{(r)}=\mathrm{Max}(0,p^{u-1}-r).$$

Sa profondeur est déterminée par les inégalités

$$(6.2)\qquad p^s>r\geq p^{s-1}\qquad\text{ou}\qquad s=E(\log r:\log p)+1.$$

Corollaire. — *Le groupe quotient* $\mathfrak{Z}_r:\mathfrak{Z}_{r+1}$ *est un groupe élémentaire, dont le nombre d'invariants est m-(profondeur de* $\mathfrak{Z}_r$).

Nous allons démontrer la propriété par récurrence. Elle est vraie pour le premier terme $\mathfrak{P}_m$, dont l'indicatrice est

$$<1,p,p^2,\dots,p^{m-1}>;$$

sa profondeur étant $r=0$, on a bien

$$\mathfrak{P}_{m\,u}=p^{u-1}=\mathrm{Max}(0,p^{u-1}-0).$$

Supposons la propriété vérifiée pour $\bar{\mathfrak{Z}}_r$, dont la profondeur s est alors déterminée par l'inégalité du théorème. D'après le théorème 5, aux premiers termes nuls de $\bar{\mathfrak{Z}}_r$ correspondent des termes nuls, de $\bar{\mathfrak{Z}}_{r+1}$; A un terme de rang u, non nul de $\bar{\mathfrak{Z}}_r$, correspond dans $\bar{\mathfrak{Z}}_{r+1} = (\bar{\mathfrak{Z}}_r, \mathfrak{P}_m)$,

$$|\bar{\mathfrak{Z}}_{r+1}|_u = \mathrm{Max}(k_u - 1, p^{u-1} - p^s) = \mathrm{Max}(p^{u-1} - r - 1, p^{u-1} - p^s),$$

ce maximum est bien égal à $p^{u-1} - (r+1)$, car l'inégalité qui détermine s entraîne

$$p^s \geqq r+1 \qquad \text{et} \qquad p^{u-1} - (r+1) \geqq p^{u-1} - p^s.$$

On peut encore exprimer le théorème 6 en disant qu'on passe de l'indicatrice de $\bar{\mathfrak{Z}}_r$ à celle de $\bar{\mathfrak{Z}}_{r-1}$, *en conservant ses termes nuls et en diminuant les autres d'une unité.*

Le problème inverse ou dual du théorème 5, qui est la recherche du commutant, est résolu par la propriété suivante :

Théorème 7. — *Pour un G. P. I. de profondeur s et d'indicatrice*

$$< 0, \ldots, 0, k_{s+1}, \ldots, k_m >,$$

le commutant $)\mathfrak{P}_m, \mathfrak{U}($ *est aussi un G. P. I., dont la profondeur* s' *et l'indicatrice*

$$< 0, \ldots, 0, k^*_{s'+1}, \ldots, k^*_m >,$$

sont définies par les conditions

$$p^{s'} \geqq p^{u-1} - k_u, \quad \text{tous } u ; \qquad k^*_u = k_u + 1 \qquad \text{pour} \quad u \geqq s'+1.$$

En particulier ceci étant valable pour $u = s$

$$p^{s'} \geqq p^{s-1} - 0, \qquad s' \geqq s-1,$$

dans le cas limite $s' = s-1$, le commutant est de profondeur $s-1$ et

$$p^{s-1} \geqq p^{u-1} - k_u, \quad \text{tous } u ; \qquad k^*_{s'+1} = k^*_s = 1.$$

D'autre part, puisque $\mathfrak{U}$ est un G. P. I. de profondeur s, on a

$$k_u \geqq p^{u-1} - p^s, \qquad \text{donc} \qquad p^s \geqq p^{u-1} - k_u$$

et s vérifie l'inégalité du théorème, d'où $s' \leqq s$.

Appelons $\mathfrak{U}^*$ le G. P. I. formé par les conditions du théorème et formons le commutateur $(\mathfrak{P}_m, \mathfrak{U}^*)$ d'après la règle du théorème 5. Les s' premiers termes de l'indicatrice (en nombre au moins égal à $s-1$) sont nuls, les suivants sont

$$\mathrm{Max}(k^*_u - 1, p^{u-1} - p^{s'}) = \mathrm{Max}(k_u, p^{u-1} - p^{s'}) = k_u,$$

ceci en raison de la condition imposée à s' (et restant éventuellement valable pour $u = s$, k_u étant nul). Les termes sont donc nuls ou égaux à ceux de l'indicatrice de $\mathfrak{U}$, donc $(\mathfrak{P}_m, \overline{\mathfrak{U}^*}) \subset \mathfrak{U}$ et $\overline{\mathfrak{U}^*}$ est inclus dans le commutant cherché.

Reste à vérifier l'inclusion inverse, ce qu'on peut établir sous la forme : pour tout élément B non dans $\mathfrak{N}^*$, il existe au moins un élément A, de $\mathfrak{P}_m$, tel que le commutateur (A, B) ne soit pas dans $\mathfrak{N}$. Si B n'appartient pas à $\overline{\mathfrak{N}^*}$, il y a au moins une de ses hauteurs $|B|_\nu$ qui est supérieure à la hauteur de même rang $|\overline{\mathfrak{N}^*}|_\nu$. Nous allons distinguer deux cas, suivant la comparaison de ν à s'.

PREMIER CAS :

$$\nu > s' \geq s-1, \qquad |B|_\nu > |\overline{\mathfrak{N}^*}|_\nu = k_\nu^* = k_\nu + 1 \geq 1,$$

ν est supérieur à 1, car, si $s'=0$; $|\mathfrak{N}^*|_1$ étant égal à 1, $|B|_1$ ne peut lui être supérieur. Il est alors commode de l'écrire. $\nu = u+1$ et les conditions peuvent être exprimées par

$$[B]_{u-1} = b(X_u), \qquad h[b(X_u)] > k_{u-1} + 1.$$

Par application du lemme 2, construisons un tableau A comme suit :

$$h[b(X) - b(X_u^{A_u'})] = h[b(X_u)] - 1 > k_{u+1}, \qquad A = [B_u^{-1} A_u' B_u, 0],$$

les coordonnées de rang supérieur à u, notamment $a(X_u)$ étant nulles, il en résulte, par application de (3.2)

$$[(B, A)]_{u+1} = b(X_u) - b(X_u^{B_u A_u B_u^{-1}}) = b(X_u) - b(X_u^{A_u'}),$$

de sorte que

$$h[(B, A)_{u-1}] > k_{u-1} \qquad \text{et} \qquad (B, A) \notin \mathfrak{N}.$$

DEUXIÈME CAS :

$$\nu \leq s', \qquad |B|_\nu > |\overline{\mathfrak{N}^*}|_\nu = 0.$$

La profondeur r de B, est inférieure à ν, donc à s', d'après la détermination de s', il existe nécessairement un rang $u+1$ tel que

$$p^r < p^u - k_{u+1} \qquad (r < u)$$

(en particulier si $r < s-1$, cette inégalité est vérifiée pour la valeur $u+1 = s$). Le tableau B_u est aussi de rang r, donc par application du lemme 4, on peut trouver un polynome $a(X_u)$ tel que

$$h[a(X_u) - a(X_u^{B_u})] = p^u - p^r > k_{u+1}.$$

Formons le tableau A, de coordonnées toutes nulles, sauf

$$[A]_{u+1} = a(X_u),$$

et formons le commutateur (B, A). D'après (3.2)

$$[(B, A)]_{u+1} = a(X_u) - a(X_u^{A_u B_u A_u^{-1}}) + b(X_u^{A_u}) - b(X_u^{A_u B_u A_u^{-1} B_u^{-1}}).$$

Mais A_u, de coordonnées nulles est une transformation identique dans E_u, de sorte que pour X_u

$$A_u B_u A_u^{-1} = B_u, \qquad A_u B_u A_u^{-1} B_u^{-1} = 1;$$

la différence des deux derniers termes est donc nulle et il reste

$$|(B, A)|_{u+1} = h[\alpha(X_u) - \alpha(X_u^{B_u})] = p^u - p^r > k_{u+1}, \qquad (B, A) \notin \mathfrak{R}.$$

Appliquons ce théorème à la S. C. D., qui a déjà été déterminée par le théorème 6, il montre que *le commutant d'un terme de la S. C. D. est son précédent*

$$(4.3) \qquad)\mathfrak{P}_m, \bar{\mathfrak{Z}}_r(= \bar{\mathfrak{Z}}_{r-1}.$$

Les termes de l'indicatrice de $\bar{\mathfrak{Z}}_r$ et sa profondeur s sont données par

$$k_u = \max(0, p^{u-1} - r), \qquad p^s > r \geq p^{s-1}.$$

La profondeur s' du commutant est déterminée par

$$p^{s'} \geq p^{u-1} - k_u = p^{u-1} - \max(0, p^{u-1} - r) = \min(p^{u-1}, r),$$

ce qui est équivalent à

$$p^{s'} \leq r \geq p^{s-1}.$$

La profondeur s' est égale en général à la profondeur s, elle n'est plus égale qu'à $s-1$ dans le cas de $r = p^{s-1}$.

Les éléments de l'indicatrice sont

$$K'_u = \max\big(0, p^{u-1} - (r-1)\big).$$

On obtient ainsi une formation de la S. C. D.; dans le sens ascendant, elle coïncide avec celle de la S. C. A., en outre le dernier terme de la première est l'unité qui est le premier terme de la deuxième. D'où la propriété :

THÉORÈME 8. — *Dans le groupe $\mathfrak{P}_m$ les suites centrales ascendantes et descendantes coïncident.*

$$(4.4) \qquad 3r = \bar{\mathfrak{Z}} p^{m-1} - r.$$

L'indicatrice est

$$\langle h_1^{(r)}, \ h_2^{(r)}, \ \ldots, \ h_m^{(r)} \rangle \qquad h_u^{(r)} = \max(0, p^{u-1} - p^{m-1} + r).$$

CHAPITRE V.

SOUS-GROUPES CARACTÉRISTIQUES DE $\mathfrak{P}_m$.

Dans ce Chapitre nous allons établir la propriété, déjà annoncée au Chapitre IV, de l'identité des G. P. I. et des sous-groupes caractéristiques de $\mathfrak{P}_m$. Nous supposerons toutefois essentiellement que *le nombre premier p est impair*, la propriété n'étant plus vraie pour $p = 2$.

THÉORÈME 9. — *Un sous-groupe caractéristique de $\mathfrak{P}_m$ est un G. P. I. Nous démontrerons la propriété plus générale : tout sous-groupe de $\mathfrak{P}_m$, invariant pour un certain groupe $\mathfrak{V}_m$, d'automorphismes de $\mathfrak{P}_m$, est un G. P. I.*

Construction du groupe $\mathfrak{V}_m$. — Considérons un système

$$W = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

de m éléments, *non nuls*, de G_p (classes, mod p, premières avec p) et la transformation W(A), qui, à un tableau A, de coordonnées $a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})$, fait correspondre le tableau de coordonnées

$$w_s a(w_1^{-1} x_1, w_2^{-1} x_2, \ldots, w_{s-1}^{-1} x_{s-1}),$$

c'est un *automorphisme* du groupe $\mathfrak{P}_m$.

D'une part, cette transformation conserve la multiplication : par application de la formule (1.1), la coordonnée, de rang s, de $W(A) \times W(B)$ est

$$(5.1)\quad w_s a(\ldots, w_i^{-1} x_i, \ldots) + w_s b\Big(\ldots, w_i^{-1}\big(x_i - w_i a(\ldots, w_j^{-1} x_j, \ldots)\big), \ldots\Big)$$
$$= w_s\Big(a(\ldots, w_i^{-1} x_i, \ldots) + b\Big(\ldots, \big(w_i^{-1} x_i - a(\ldots, w_j^{-1} x_j, \ldots)\big), \ldots\Big)\Big),$$

ce qui est bien la coordonnée, de rang s de W(AB).

D'autre part, la transformation est biunivoque, puisqu'elle a manifestement une inverse

$$W^{-1} = (w_1^{-1}, w_2^{-1}, \ldots, w_m^{-1}).$$

Le produit, ou succession de deux opérateurs est

$$W \times W' = (w_1 w'_1, w_2 w'_2, \ldots, w_m w'_m),$$

c'est un automorphisme de même nature, indépendant de l'ordre du produit. L'ensemble des transformations W est donc un groupe abélien $\mathfrak{W}_m$ isomorphe à un produit direct de groupes cycliques d'ordre $p - 1$ (groupes multiplicatifs des classes, mod p, premières avec p).

Considérons d'autre part le groupe $\mathfrak{I}_m \cong \mathfrak{P}_m | \mathfrak{Z}_1$ des automorphismes intérieurs (ou transmutations) de $\mathfrak{P}_m$, le groupe $\mathfrak{V}_m$ est le groupe engendré (1) par $\mathfrak{I}_m$ et $\mathfrak{W}_m$.

Démonstration. — Nous allons établir la propriété par récurrence sur m; elle est manifestement vraie pour $\mathfrak{P}_1$, supposons-la vraie pour $\mathfrak{P}_{m-1}$ et considérons un groupe $\mathfrak{H}$ de tableaux H, invariant pour les automorphismes de $\mathfrak{V}_m$. Les tableaux H_{m-1} forment un groupe $\mathfrak{H}_{m-1}$, évidemment invariant pour les

(1) Le groupe ainsi constitué ne contient pas tous les automorphismes de $\mathfrak{P}_m$, mais on peut aisément démontrer qu'il est constitué par ceux de ces automorphismes qui sont en même temps des automorphismes intérieurs du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{p^m}$, dont $\mathfrak{P}_m$ est un p-groupe de Sylow.

automorphismes de $\mathfrak{P}_{m-1}$; c'est donc par l'hypothèse de récurrence, un G. P. I. de $\mathfrak{P}_{m-1}$, donc défini par une indicatrice

$$< k_1, k_2, \ldots, k_{m-1} >.$$

Appelons k_m le maximum des hauteurs $|H|_m$, des tableaux de $\mathfrak{H}$, il existe un tableau H tel que

$$H = [H_{m-1}, g(X_{m-1})], \qquad h[g(X_{m-1})] = k_m.$$

Considérons alors une transformation

$$W = (1, 1, \ldots, w) \qquad (w \neq 1),$$

(ce qui suppose $p > 2$) et formons $W(H)H^{-1}$, qui est toujours dans $\mathfrak{H}$, par application des formules (1.1′) et (2.2′)

$$\begin{aligned} W(H)H^{-1} &= [H_{m-1}, w\, g(X_{m-1})]\,[H_{m-1}^{-1}, -g(X_{m-1}^{H_{m-1}^{-1}})] \\ &= [0, \ldots, 0, (w-1)\, g(X_{m-1})], \qquad h[(w-1)\, g(X_{m-1})] = k_m. \end{aligned}$$

Donc, par application du corollaire du lemme 2, $\mathfrak{H}$ étant distingué, contient tout tableau de la forme

$$A = [0, \ldots, 0, a(X_{m-1})], \qquad h[a(X_{m-1})] \leq k_m.$$

Considérons alors des fonctions quelconques $d(X_s)$, vérifiant les conditions

$$h[d(X_{s-1})] \leq k_s, \qquad (s \text{ de } 1 \text{ à } m-1), \qquad h[d(X_{m-1})] \leq k_m.$$

Par application de l'hypothèse de récurrence et de la détermination de k_m, il existe dans $\mathfrak{H}$, un tableau

$$D_1 = [\ldots, d(X_t), \ldots, a(X_{m-1})], \qquad h[a(X_{m-1})] \leq k_m,$$

il y existe d'autre part le tableau

$$D_2 = [\ldots, 0, \ldots, d(X_{m-1}) - a(X_{m-1})],$$

et par suite le tableau

$$D_2 \times D_1 = [d, d(X_1), \ldots, d(X_{m-2}), d(X_{m-1})].$$

C'est dire que le groupe $\mathfrak{H}$ contient tous les tableaux dont l'indicatrice est au plus égal à

$$< k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, k_m >;$$

comme il n'en contient pas d'autre. d'après la détermination des hauteurs k_s, c'est bien le G. P. I. défini par cette indicatrice.

Théorème 10. — *Les G. P. I. de $\mathfrak{P}_m$ en sont des sous-groupes caractéristiques.*

La démonstration va être faite en plusieurs étapes, exprimées par des lemmes, qui présentent en eux-mêmes un certain intérêt.

LEMME 11. — *Tout G. P. I.* $\mathfrak{D}_s$ *est un sous-groupe caractéristique de* $\mathfrak{P}_m$.

Rappelons que $\mathfrak{D}_s$ est l'ensemble de tous les tableaux dont la profondeur est au moins égale à s, c'est-à-dire dont les s premières coordonnées sont nulles, son indicatrice est

$$<0, \ldots, 0, p^s, p^{s+1}, \ldots, p^{m-1}>.$$

Nous allons démontrer ce lemme par récurrence sur m, en le supposant vrai pour $\mathfrak{P}_{m-1}$ (il est manifeste pour $\mathfrak{P}_1$), il suffit de le vérifier pour

$$\mathfrak{D}_{m-1} \text{ dans } \mathfrak{P}_m \text{ d'indicatrice } <0, \ldots, 0, p^{m-1}>.$$

Dans la S. C. A. de $\mathfrak{P}_m$ formons le terme $\mathfrak{Z}_r$, de rang $r = p^{m-2} + 1$, les termes de son indicatrice sont

$$\max(0, p^{u-1} - p^{m-1} + 1 + p^{m-2}).$$

Or, pour u inférieur à m (toujours en tenant compte de $p > 2$)

$$p^{u-1} - p^{m-1} + 1 + p^{m-2} < 1 + 2p^{m-2} - p^{m-1} \leq 0.$$

De sorte que $\mathfrak{Z}_r$ est le groupe abélien constitué par les tableaux

$$(5.2) \qquad [0, \ldots, 0, a(x_1, \ldots x_{m-1})], \qquad h[a(x_1, \ldots, x_{m-1})] \leq p^{m-2} + 1 = h[x_{m-1}].$$

On peut alors vérifier que $\mathfrak{D}_{m-1}$ est le *centralisateur* de ce groupe $\mathfrak{Z}_r$, d'une part il le contient, et comme il est abélien, il est contenu dans ce centralisateur. D'autre part si A est un tableau qui n'est pas dans $\mathfrak{D}_{m-1}$, il a une coordonnée de rang $u < m$, non nulle

$$[A]_u = a(X_{u-1}) \neq 0;$$

il existe dans $\mathfrak{Z}_r$ un tableau B dont la dernière coordonnée (la seule non nulle) est x_u et il en résulte

$$(A, B) = [0, \ldots, 0, -a(X_{u-1})] \neq \text{unité de } \mathfrak{P}_m.$$

Par suite A n'est pas dans le centralisateur de $\mathfrak{Z}_r$, qui ne contient donc que les termes de $\mathfrak{D}_{m-1}$.

$\mathfrak{D}_{m-1}$ étant centralisateur d'un sous-groupe caractéristique de $\mathfrak{P}_m$, est lui-même caractéristique.

COROLLAIRE. — *La profondeur d'un tableau est un invariant pour tous les automorphismes du groupe* $\mathfrak{P}_m$.

LEMME 12. — *Tout G. P. I.* $\mathfrak{F}_{h,s}$ *dont l'indicatrice est*

$$<0, \ldots, 0, h, p^{s+1}, \ldots, p^{m-1}>, \qquad 0 \leq h \leq p^s;$$

est un sous-groupe caractéristique de $\mathfrak{P}_m$.

Dans la S. C. D. de $\mathfrak{P}_m$, le terme $\bar{\mathfrak{Z}}_r$, de rang $r = p^s - h$ a pour coordonnée de rang $s+1$ (th. 6)

$$|\,\mathfrak{Z}_r\,|_{s+1} = p^s - (p^s - h) = h \geqq 0,$$

il en résulte que

$$\mathfrak{F}_{h,s} = \{\,\mathfrak{D}_s \cap \bar{\mathfrak{Z}}_r,\ \mathfrak{D}_{s+1}\,\};$$

les groupes qui entrent dans cette construction étant caractéristiques, il en est de même du résultat $\mathfrak{F}_{h,s}$.

Appelons *hauteur principale* d'un tableau la hauteur de sa première coordonnée non nulle; c'est $|\,A\,|_{s+1}$ pour un tableau A, de profondeur s.

Lemme 13. — *La hauteur principale d'un tableau est un invariant pour tous les automorphismes du groupe* $\mathfrak{P}_m$.

Considérons un tableau A, de profondeur s et de hauteur principale h, son transformé A^α, où α est un automorphisme de $\mathfrak{P}_m$ est aussi de profondeur s (Corollaire du lemme 11). D'autre part A étant contenu dans $\mathfrak{F}_{h,s}$ qui est caractéristique, il en est de même de A^α, de sorte que

$$|\,A^\alpha\,|_{s+1} \leqq h = |\,A\,|_{s+1}.$$

Mais le même raisonnement, appliqué à A^α et à la transformation α^{-1} donne

$$|\,A\,|_{s+1} = |\,(A^\alpha)^{\alpha-1}\,|_{s+1} \leqq |\,A^\alpha\,|_{s+1};$$

il y a donc égalité des hauteurs principales A et d'un de ses transformés, quelconque A^α.

Remarque. — Si $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ sont deux G. P. (non nécessairement distingués) différents, il y a au moins un rang s tel que $|\,\mathfrak{U}\,|_s$ et $|\,\mathfrak{U}'\,|_s$ soient différents. Supposons par exemple que le premier soit le plus grand; il contient des tableaux A, de profondeur $s-1$ et de hauteur principale $|\,A\,|_s = |\,\mathfrak{U}\,|_s$. D'après le lemme 13, pour tout α, automorphisme de $\mathfrak{P}_m$,

$$|\,A^\alpha\,|_s = |\,A\,|_s = |\,\mathfrak{U}\,|_s > |\,\mathfrak{U}'\,|_s \qquad \text{et} \qquad A^\alpha \notin \mathfrak{U}'.$$

Donc aucun transformé de $\mathfrak{U}^\alpha$ de $\mathfrak{U}$ ne peut être égal à $\mathfrak{U}'$ (et de même $\mathfrak{U}'^\alpha$ ne peut être égal à $\mathfrak{U}$, sinon $\mathfrak{U}^{\alpha^{-1}}$ serait égal à $\mathfrak{U}'$).

Lemme 14. — *Pour un tableau* A *de profondeur* $s \leqq m-2$, *le nombre de zéros de son premier terme* (non nul) $|\,A\,|_{s+1} = a(X_s)$ *est un invariant pour tous les automorphismes du groupe* $\mathfrak{P}_m$.

Par zéro de $a(X_s)$ on entend, bien entendu un vecteur X_s (de coordonnées $x_i, \ldots, x_s$, définies mod$p$) qui annule le polynome.

Formons le groupe $\mathfrak{L}(A)$ des tableaux de $\mathfrak{D}_{s+1}$ qui sont permutables avec A, au module près $\mathfrak{D}_{s+2}$, puis le groupe quotient $\bar{\mathfrak{L}}(A) = \mathfrak{L}(A)\,|\,\mathfrak{D}_{s+2}$. Il reste iso-

morphe à lui-même dans tout automorphisme α, qui remplace A par A^{α} et laisse invariants les sous-groupes caractéristiques $\mathfrak{D}_{s-1}$ et $\mathfrak{D}_{s+2}$. L'ordre de ce groupe quotient est donc un invariant; pour le calculer nous pouvons évidemment remplacer A par le tableau de profondeur $s+2$

$$[0, \ldots, 0, a(X_s), \ldots], \quad a(X_s) = [A]_{s+1}.$$

Pour qu'un tableau D, de $\mathfrak{D}_{s-1}$, et de première coordonnée $d(X_{s-1})$ soit dans $\overline{\mathfrak{L}}(A)$, il faut et il suffit que le commutateur

$$(D_{s+2}, A_{s+2}) = [0, \ldots, 0, d(X_{s+1}) - d(X_{s+1}^{A_{s+1}})]$$

soit l'unité de $\mathfrak{P}_{s+2}$, c'est-à-dire que

$$d(X_{s-1}) - d(X_{s+1}^{A_{s+1}}) = 0. \tag{5.3}$$

Or, d'après le lemme 5, le nombre de solutions de cette équation fonctionnelle est $p^{t(A_{s+1})}$, où $t(A_{s+1})$ est le nombre de domaines de transitivité de la transformation $X_{s+1}^{A_{s+1}}$, qui est définie par

$$x_u^{A_{s-1}} = x_u \quad (\text{pour } u < s+1), \qquad x_{s+1}^{A_{s+1}} = x_{s+1} - a(X_s).$$

Les vecteurs

$$X_{s+1} = (X_s, x_{s+1}), \qquad a(X_s) = 0,$$

sont conservés par la transformation A_{s+1} et constituent chacun un domaine de transitivité; leur nombre est $pn(A)$ où $n(A)$ est le nombre de zéros de $a(X_s)$.

Les autres vecteurs forment des domaines de transitivité de chacun p éléments (pour chaque valeur de X_s et les p valeurs de x_{s+1}); le nombre de ces domaines est $p^s - n(A)$.

Finalement

$$t(A_{s+1}) = p^s - n(A) + pn(A) = p^s + (p-1)n(A).$$

C'est un invariant, comme l'ordre $p^{t(A_{s+1})}$ et il en est de même du nombre $n(A)$ de zéros de $a(X_s)$.

En outre, si pour deux tableaux A et B, les nombres $n(A)$ et $n(B)$ sont différents, il en est de même des ordres de $\overline{\mathfrak{L}}(A)$ et de $\overline{\mathfrak{L}}(B)$; il n'y a donc aucun automorphisme α qui transforme A en B.

Lemme 15. — *Si, dans un tableau de profondeur s* et d'ordre p, *la première coordonnée non nulle* $[A]_{s+1} = a(X_s)$ *n'a aucun zéro, les hauteurs des coordonnées suivantes vérifient les inégalités*

$$|A|_u \leq p^{u-1} - p^s, \qquad u \geq s+2.$$

Il suffit de démontrer que, les conditions de l'énoncé étant remplies, on peut trouver un tableau B, de profondeur supérieure à s tel que

$$B^{-1}AB = [0, \ldots, 0, a(X_s), 0, \ldots, 0] = A', \tag{5.4}$$

car l'application de (3.9) montre alors que

$$|A'|_u = |BA'B^{-1}|_u \leq \mathrm{Max}(|A'|_u, p^{u+1} - p^s) = p^{u-1} - p^s.$$

Raisonnons par récurrence et supposons obtenu un tableau B_r tel que

$$C = B_r^{-1} A B_r = [o, \ldots, o, a(X_s), o, \ldots, c(X_r), \ldots], \qquad r > s,$$

c'est-à-dire que dans C, les $(r-s-1)$ coordonnées qui suivent celle de rang $s+1$ sont nulles ($r-s-1$ pouvant être nul). Calculons la puissance p

$$C^p = [o, \ldots, o, c(X_r) + c(X_r^{C_r}) + \ldots + c(X_r^{C_r^{p-1}}), \ldots],$$

cette puissance est l'unité de $\mathfrak{P}_m$, puisque C est d'ordre p, donc

$$o = \Sigma c(X_r^{C_r^u}) = \Sigma c[x_1, \ldots, x_s, x_{s+1} - u\,a(X_s), x_{s+2}, \ldots, x_r];$$

(u de o à $p-1$, toutes valeurs des x_i).

Comme $a(X_s)$ n'est pas nul, pour des valeurs déterminées de X_s et x_{s+1}, la différence $x_{s+1} - u\,a(X_s)$ prend toutes les valeurs de zéro à $p-1$, pour les valeurs de u variant dans les mêmes limites. Par suite, pour des valeurs déterminées des x_i, les vecteurs de la somme sont les domaines de transitivité du tableau C_r dans E_r et l'identité est équivalente à

$$\mathbf{S}_{T(C)} c(X_r) = o, \qquad T(C), \text{ domaines de transitivité de C.}$$

D'après le lemme 6, l'équation fonctionnelle

$$f(X_r) - f(X_r^{C_r}) = c(X_r),$$

a donc une solution. Posons

$$B'_r = [o, \ldots, o, f(X_r), o, \ldots, o], \qquad B'_{r+1} = B_r B'_r,$$

et formons le tableau

$$C' = B'^{-1}_r C B'_r = B'^{-1}_{r+1} A B_{r+1} = [o, \ldots, o, a(X_s), o, \ldots, o, c'(X_r), \ldots],$$

le terme de rang $r+1$

$$c'(X_r) = -f(X_r) + f(X_r^{C_r}) + c(X_r),$$

y est nul. Donc, dans C′ construit avec B_{r+1}, le premier terme non nul, après celui de rang $s+1$ est celui de rang au moins $r+2$ (au lieu de $r+1$). On peut ainsi construire de proche en proche un tableau B vérifiant la condition (5.4).

Lemme 16. — *Le G. P. I. $\mathfrak{C}_s$ dont l'indicatrice est*

$$< o, \ldots, o, p^s, p^{s+1} - p^s, \ldots, p^{m-1} - p^s >,$$

est un sous-groupe caractéristique de $\mathfrak{P}_m$.

Remarquons que, en supposant toujours $p \neq 2$, il existe des polynomes en $x_1, \ldots, x_s$, de hauteur (maximum) p^s, qui n'ont pas de zéro; notamment

$$x_1^{p-1} x_2^{p-1} \ldots x_s^{p-1} + 1.$$

Considérons alors l'ensemble des tableaux θ vérifiant les conditions suivantes :

1° Tout tableau θ est de profondeur s;
2° Tout tableau θ est d'ordre p;
3° La coordonnée de rang $s+1$ de θ n'a pas de zéro.

D'après les lemmes 11 et 14, cet ensemble est invariant pour tous les automorphismes du groupe $\mathfrak{P}_m$. Le groupe $\mathfrak{C}_s$ qu'ils engendrent est donc un sous-groupe caractéristique, donc un G. P. I. Il contient le tableau

$$[0, \ldots, 0, x_1^{p-1} \ldots x_s^{p-1} + 1, 0, \ldots, 0],$$

de sorte que $|\mathfrak{C}_s|_{s+1} = p^s$.

D'autre part, d'après le lemme 15, pour tout tableau θ,

$$|\theta|_u \leq p^{u-1} - p^s, \qquad u \geq s+2.$$

Mais le théorème 4 donne la même limite inférieurement, de sorte que

$$|\mathfrak{C}_s|_u = p^{u-1} - p^s, \qquad u \geq s+2.$$

Lemme 17. — *Le G. P. I. $\mathfrak{C}_{s,h}$, dont l'indicatrice est*

$$< 0, \ldots, 0, h, p^{s+1} - p^s, \ldots, p^{m-1} - p^s >,$$

est un sous-groupe caractéristique de $\mathfrak{P}_m$.

Construisons par récurrence, les sous-groupes

$$\mathfrak{C}_{s,p^s} = \mathfrak{C}_s, \qquad \mathfrak{C}_{s,h-1} = (\mathfrak{C}_{s,h}, \mathfrak{P}_m),$$

ils sont caractéristiques. D'autre part le théorème 5 montre que le sous-groupe $\mathfrak{C}_{s,h}$ ainsi construit a bien l'indicatrice indiquée par le lemme.

Démonstration du théorème 10. — Considérons un G. P. I., quelconque, de profondeur s et d'indicatrice

$$< 0, \ldots, 0, k_{s+1}, \ldots, k_m > \quad \text{avec} \quad k_u \geq p^{u-1} - p^s;$$

il est engendré par les sous-groupes

$$\mathfrak{C}_{s,k_{s+1}}, \quad \mathfrak{C}_{s+1,k_{s+2}}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{C}_{m-1,k_m},$$

qui sont caractéristiques, il est donc lui-même caractéristique.

Nous allons compléter ces divers résultats en déterminant parmi les sous-groupes caractéristiques, les *dérivées successives* $\mathfrak{A}_s$ de $\mathfrak{P}_m$ et les groupes $\mathfrak{L}_l$ engendrés par les *puissances d'exposant* p^l, des éléments de $\mathfrak{P}_m$.

Rappelons que les dérivées successives, d'un groupe $\mathfrak{G}$ quelconque sont définis par les relations de récurrence

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{A}_{s+1} = (\mathfrak{A}_s, \mathfrak{A}_s).$$

Théorème 11. — *La dérivée $\mathfrak{A}_s$, de rang s, de $\mathfrak{P}_m$, est le G. P. I. de profondeur s, qui a pour indicatrice*

$$< 0, \ \ldots, \ 0, \ , p^s - p^{s-1}, \ \ldots, \ p^{m-1} - p^{s-1} >$$

ou

$$| \mathfrak{A}_s |_u = p^{u-1} - p^{s-1}, \qquad u \geq s.$$

Nous allons démontrer la propriété par récurrence sur s; elle est vraie pour $\mathfrak{A}_1 = \bar{\mathfrak{I}}_1$ d'indicatrice

$$< 0, \ p-1, \ p^2-1, \ \ldots, \ p^{m-1}-1 >.$$

Supposons-la établie pour $\mathfrak{A}_s$; sa profondeur étant s, la formule (3.5) appliquée à deux tableaux quelconques A et A′ de cette dérivée donne

$$| (\mathrm{A}, \mathrm{A}') |_{u+1} \leq p^u - p^s;$$

la profondeur de la dérivée suivante $\mathfrak{A}_{s+1}$ est donc au moins $s+1$.

Reste à montrer que, pour tout $u > s$, il existe au moins deux tableaux, pour lesquels cette comparaison devient une égalité.

Or, $\mathfrak{A}_s$ contient le tableau

$$\mathrm{A} = [0, \ \ldots, \ 0, \ x_s, \ 0, \ \ldots, \ 0], \qquad | \mathrm{A} |_{s+1} = p^{s-1} + 1 < p^s - p^{s-1} = | \mathfrak{A}_s |_{s+1},$$

il contient d'autre part, quel que soit $u > s$, le tableau

$$\mathrm{A}' = [0, \ \ldots, \ 0, \ (x_1^{p-1} \ldots x_s^{p-2} \ldots x_u^{p-1}), \ 0, \ \ldots, \ 0],$$

dont le seul terme, non nul, de rang $u+1$, a pour hauteur

$$h[x_1^{p-1} \ldots x_s^{p-2} \ldots x_u^{p-1}] = p^u - p^{s-1} = | \mathfrak{A}_s |_{u+1}.$$

Leur commutateur a pour terme de rang $u+1$

$$\begin{aligned} [(\mathrm{A}, \mathrm{A}')|_{u+1} &= - x_1^{p-1} \ldots x_s^{p-2} \ldots x_u^{p-1} + x_1^{p-1} \ldots x_s^{p-2} (x_{s+1} - x_s)^{p-1} x_{s+2}^{p-1} \ldots x_u^{p-1} \\ &= -(p-1) x_1^{p-1} \ldots x_s^{p-1} x_{s+1}^{p-2} x_{s+2}^{p-1} \ldots x_u^{p-1} + \text{termes hauteur inf.} \end{aligned}$$

dont la hauteur est bien égale à $p^u - p^s$.

Pour résoudre le deuxième problème établissons encore un lemme :

LEMME 18. — *La puissance* A^{p^l} *d'un tableau quelconque est de profondeur au moins* l *et les hauteurs de ses coordonnées non nulles vérifient*

$$|A^{p^l}|_u \leq p^{u-1} - p^l + 1, \qquad u \geq l+1,$$

il y a égalité, si quel que soit u

$$|A|_u = p^{u-1}.$$

Remarquons d'abord qu'un monome, de variable X_{u-1}, ne peut être de hauteur au moins égale à $p^{u-1} - p^l + 1$ que dans le cas où les puissances des variables de x_{l+1} à x_{u-1} sont toutes d'exposant $p-1$. Car si une variable $x_\nu (l+1 \leq \nu \leq u-1)$ était de puissance inférieure, la hauteur du monome serait au plus égale à

$$p^{u-1} - p^{\nu-1} \leq p^{u-1} - p^l.$$

En outre

$$h(x_{l+1}^{p-1} \dots x_{u-1}^{p-1}) = p^{u-1} - p^l + 1.$$

L'énoncé est donc équivalent a l'affirmation que dans $[A^{p^l}]_u = a(X_{u-1})$, il n'y a pas de monomes de la forme $f(X_l) x_{l+1}^{p-1} \dots x_{u-1}^{p-1}$, sauf avec $f(X_l)$ constant. En particulier, il entraîne

$$|A^{p^l}|_l = a(x_1, \dots, x_{l-1}) = \text{const.}$$

On peut établir la propriété par récurrence sur l: elle est manifeste pour $l = 0$, puisque

$$|A|_u \leq p^{u-1} = p^{u-1} - p^0 + 1.$$

Supposons-la vraie pour

$$B = A^{p^{l-1}} = [0, \dots, b, \dots, b(X_{u-1}), \dots], \qquad b \text{ de rang } l:$$

il suffit de la vérifier pour les coordonnées de $A^{p^l} = B^p$, qui sont :

$$[B^p]_u = \Sigma b \left(X_{u-1}^{p i_l}\right); \qquad i \text{ de } 0 \text{ à } p-1.$$

le terme de rang l est manifestement nul et la profondeur est au moins l. Les monomes qui dépasseraient la limite indiquée dans cette somme, ne peuvent provenir que des monomes de $b(X_{u-1})$, qui seraient de l'une des deux formes (s'il en existe)

$$x_l^{i_l} \dots x_l^{i_l} x_{l+1}^{p-1} \dots x_{u-1}^{p-1}, \qquad i_l < p-1, \qquad x_l^{p-1} x_{l+1}^{p-1} \dots x_{u-1}^{p-1}.$$

En étudiant les termes qui en proviennent on constate que le premier ne donne que des termes de hauteur inférieure et que le second donne des termes de hauteur au plus égal à $p^{u-1} - p^l + 1$. L'égalité n'a lieu que si $b \neq 0$, ou $|B|_l = 1$. L'existence de monomes de la deuxième forme exige, par ailleurs, pour tout u

$$B|_u = p^{u-1} - p^{l-1} + 1,$$

les égalités sont alors vérifiées pour B^p. On obtient donc, par récurrence, la forme nécessaire de A, indiquée par le lemme

$$A|_u = p^{u-1} \quad \text{ou} \quad |A| = <1, p, p^2, \ldots, p^{m-1}>,$$

d'où

$$|A^{p^l}| = <\ldots, \mathrm{Max}(0, p^{u-1} - p^l + 1), \ldots>.$$

THÉORÈME 12. — *Le groupe $\mathfrak{L}_l$, engendré par des puissances, d'exposant p^l, des tableaux de $\mathfrak{P}_m$ est le G. P. I., de profondeur l, qui a pour indicatrice*

$$<0, \ldots, 0, 1, p^{l+1} - p^l + 1, \ldots, p^{m-1} - p^l + 1>.$$

Comme il est caractéristique, ce groupe est un G. P. I.; son indicatrice résulte immédiatement du lemme précédent.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DU GROUPE $\mathfrak{P}_2$.

Ce Chapitre est consacré à l'étude du p-groupe $\mathfrak{P}_2$ de Sylow, du groupe symétrique de degré p^2, son ordre est $p^p + 1$. Il possède ainsi que ses sous-groupes transitifs, non commutatifs $\mathfrak{H}$, un sous groupe distingué abélien, élémentaire, d'indice p. Des groupes possédant cette propriété ont été étudiés par G. A. Miller(1) et, avec une autre méthode, par H. R. Brahana(2).

L'algorithme des tableaux permet de faire une étude très détaillée de $\mathfrak{P}_2$. Nous déterminerons d'une part son groupe d'automorphismes, d'autre part ses sous-groupes (leur type et leur position respective).

Il est isomorphe à l'ensemble des tableaux de rang 2. $A = |a, a(x)]$ avec la loi de composition

$$[a, a(x)][b, b(x)] = [a + b, a(x) + b(x - a)], \tag{6.1}$$

l'unité est le tableau $[0, 0]$, l'inverse de $A = [a, a(x)]$ est $A^{-1} = [-a, -a(x+a)]$.

La S. C. A. qui coïncide avec la S. C. D. a $p + 1$ termes (la classe de $\mathfrak{P}$ est p)

$$\mathfrak{Z}_0 = \text{unité de } \mathfrak{P}_2, \quad \mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_u, \ldots, \mathfrak{Z}_p = \mathfrak{P}_2,$$

le terme $\mathfrak{Z}_u$ est l'ensemble des tableaux

$$[0, a(x)], \quad h[a(x)] \leq u \quad \text{ou} \quad \text{degré } a(x) \leq u - 1.$$

---

(1) *Determination* (*Bull. of Amer. Math. Soc.*, Série 2, Vol. 8, 1909, p. 398).

(2) *On isomorphism of abelian groupe* (*Amer. Journal*, Vol. LVI, 1934, p. 53 à 61).

En plus de ces sous-groupes, $\mathfrak{P}_2$ possède deux sous-groupes caractéristiques

$$\mathfrak{D}_1 : \text{ensemble } [0, a(x)], \quad \text{degré } a(x) \leq p-1,$$
$$\mathfrak{C} : \text{ensemble } [a, a(x)], \quad \text{degré } a(x) \leq p-2.$$

Les indicatrices des G. P. I. sont en effet (th. 4)

$$<1, p>, \quad <1, \quad p-1> \quad \text{et} \quad <0, i>, \quad 0 \leq i \leq p.$$

Recherche des automorphismes. — Le groupe $\mathfrak{P}_2$ peut être engendré par les deux tableaux $A_1 = [1, 0]$, $A_2 = [0, x^{p-1}]$. Un automorphisme α sera donc caractérisé par la donnée des tableaux A_1^α, A_2^α. Or

$$A_1 \in \mathfrak{C} \quad \text{et} \quad A_1 \notin \mathfrak{D}_1 \quad \text{entraînent} \quad A_1^\alpha \in \mathfrak{C} \quad \text{et} \quad A_1^\alpha \notin \mathfrak{D}_1 ;$$

puisque ces sous-groupes sont caractéristiques, on en conclut que A_1^α ne peut qu'être de la forme

$$[c, c_{p-2}x^{p-2} + \ldots + c_0] \qquad (c \neq 0),$$

ce qui donne $(p-1)p^{p-1}$ transformations possibles.

De la même façon

$$A_2 \in \mathfrak{D}_1 \quad \text{et} \quad A_2 \notin \mathfrak{Z}_{p-1} \quad \text{entraînent} \quad A_2^\alpha \in \mathfrak{D}_1 \quad \text{et} \quad A_2^\alpha \notin \mathfrak{Z}_{p-1},$$

de sorte que A_2^α ne peut qu'être de la forme

$$[0, dx^{p-1} + d_{p-2}x^{p-2} + \ldots + d_0] \qquad (d \neq 0),$$

ce qui donne $(p-1)p^{p-1}$ formes possibles.

Les combinaisons de ces transformations donnent une majoration du nombre des automorphismes dont on désigne le groupe par $\mathfrak{A}$

$$\text{ordre de } \mathfrak{A} \leq (p-1)^2 p^{2p-2}. \tag{6.2}$$

Nous allons montrer que ce maximum est en effet atteint, de sorte qu'on a bien construit ainsi tous les automorphismes.

On peut construire un automorphisme en faisant correspondre à tout tableau A, le tableau

$$\Phi(A) = [a, a(x) + f_1 a'(x) + f_2 a''(x) + \ldots + f_{p-1} a^{(p-1)}(x)],$$

où $a'(x)$, $a''(x)$, ... sont les dérivées successives de $a(x)\left(a^{(p)}(x) = 0\right)$ et $[f_0 = 1, f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}]$ est un système d'éléments de G_p, qui sera désigné par φ et auquel sera asssocié le polynome

$$\varphi(y) = f_0 + f_1 y + f_2 y^2 + \ldots + f_{p-1} y^{p-1} \pmod{y^p}.$$

On vérifie immédiatement que cette transformation conserve l'opération

$$\Phi(A)\Phi(B) = \Phi(AB).$$

En outre,

$$\Phi(A_1) = A_1, \qquad \Phi(A_2) = [0, x^{p-1} + g(x)], \qquad \text{degré } g(x) < p-1,$$

de sorte que $\Phi(A_1)$ et $\Phi(A_2)$ engendrent le groupe et la transformation est biunivoque.

Le produit de deux automorphismes

$$\varphi = [f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}], \qquad \varphi' = [f'_0, f'_1, \ldots, f'_{p-1}], \qquad f_0 = f'_0 = 1$$

est

$$\psi = \left[f_0 f'_0, f_0 f'_1 + f_1 f'_0, \ldots, \sum_{i+j=k} f_i f'_j, \ldots, \sum_{i+j=p-1} f_i f'_j \right],$$

ce qu'on peut exprimer par

$$\psi(y) \equiv \varphi(y)\varphi'(y) \pmod{y^p} \quad (\text{dans } G_p).$$

En outre,

$$[\varphi(y)]^p = \varphi(y^p) \equiv 1 \pmod{y^p}.$$

L'ensemble des automorphismes ainsi construits forme donc un groupe abélien $\mathcal{F}$, dont tous les termes sont d'ordre p, c'est-à-dire encore qui est un groupe élémentaire, produit de $p-1$ groupes d'ordre p.

Formons l'intersection de $\mathcal{F}$ avec le groupe $\mathcal{J}$ des automorphismes intérieurs (ou transmutations) de $\mathfrak{P}_m$, qui est isomorphe à $\mathfrak{P}_m | \mathfrak{Z}_1$, donc d'ordre p^p. Le tableau $A_1 = [1, 0]$, qui est invariant pour les automorphismes Φ (de $\mathcal{F}$), est transformé par une transmutation en

$$[a, a(x)][1, 0][-a, -a(x+a)] = [1, a(x) - a(x-1)].$$

il ne reste invariant que pour les transmutations définies par les tableaux $[a, c]$, où c est une constante. Mais ces tableaux, pour une même valeur de a, et les diverses valeurs de c, définissent un automorphisme Φ, car

$$[a, c][b, b(x)][-a, -c] = [b, b(x-a)],$$

et

$$b(x-a) = b(x) + (-a)b'(x) + \frac{1}{2!}(-a)^2 b''(x) + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}(-a)^{p-1} b^{p-1}(x).$$

Comme $\mathcal{J}$ est sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}$, le groupe $\{\mathcal{J}, \mathcal{F}\}$, construit avec les éléments de $\mathcal{J}$ et de $\mathcal{F}$, est d'ordre $(p^{p-1} p^p) : p = p^{2p-2}$. Tenant compte de l'inégalité (6.2), c'est un p-groupe de Sylow de $\mathfrak{A}$.

Considérons d'autre part les automorphismes W, du groupe $\mathfrak{W}$, construit dans la théorie générale (Chap. V), dans le cas actuel ce sont

$$W = (w_1, w_2), \qquad W(a, a(x)) = [w_1 a, w_2 a(w_1^{-1} x)].$$

il y en a $(p-1)^2$. On vérifie par un calcul immédiat que $\mathfrak{F}$ est permutable dans son ensemble avec les opérations W, et il en est de même du groupe précédent $\{\mathfrak{J}, \mathfrak{F}\}$. Donc :

Le groupe $\{\mathfrak{W}, \mathfrak{J}, \mathfrak{F}\}$ *est un groupe d'ordre* $(p-1)^2 p^{2p-2}$, *qui est donc* [en raison de l'inégalité (6.2)] *le groupe* $\mathfrak{A}$ *de tous les automorphismes de* $\mathfrak{P}_2$.

Éléments conjugués. — Le transmué d'un tableau $A = |a, a(x)|$ par un tableau $Q = [q, q(x)]$ est

$$QAQ^{-1} = [a, a(x-q) + q(x) - q(x-a)].$$

La première coordonnée a d'un tableau est donc un invariant pour les automorphismes intérieurs. Un autre invariant est le coefficient a_{p-1} de x^{p-1} dans $a(x)$, c'est une conséquence du lemme 1 ; un calcul simple permet aussi de le vérifier directement.

Premier cas $a \not\equiv 0$. — Les deux invariants a et a_{p-1} suffisent pour déterminer l'ensemble des éléments conjugués de A. En effet, l'équation fonctionnelle en $t(x)$

$$t(x-a) - t(x) = a(x) - a_{p-1}x^{p-1},$$

a une solution : et, en transmuant A par le tableau $T = |0, t(x)|$, on obtient

$$TAT^{-1} = [a, a_{p-1}x^{p-1}].$$

a. Les tableaux, pour lesquels a_{p-1} est nul, sont d'ordre p. Pour que deux d'entre eux soient conjugués, il faut et il suffit qu'ils aient même première coordonnée. Il en résulte que tous les sous-groupes cycliques d'ordre p, qui contiennent des tableaux dont la première coordonnée n'est pas nulle, sont conjugués dans $\mathfrak{P}_2$.

b. Les tableaux, pour lesquels a_{p-1} n'est pas nul, sont d'ordre p^2. On peut engendrer un groupe cyclique, indifféremment par un tableau A, d'invariants a, a_{p-1}, ou par sa puissance A^i (i premier avec p), d'invariants ia, ia_{p-1}. Le quotient $c = a : a_{p-1}$ (défini mod p), est un invariant de ce groupe et les sous-groupes cycliques, d'ordre p^2, de même invariant c, sont conjugués, ils forment $p-1$ classes.

Relativement au groupe $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{J}, \mathfrak{W}\}$ d'automorphismes, ils ne forment plus qu'une seule classe, car une transformation $W = (w_1, w_2)$ remplace les invariants a, a_{p-1} d'un tableau par $w_1 a$, $w_2 a_{p-1}$ et l'invariant c par $w_1 w_2^{-1} c$.

Deuxième cas $a = 0$. — Le transmué de $A = |0, a(x)|$ par un tableau Q est

$$QAQ^{-1} = [0, a(x-q)].$$

Suivant que $a(x)$ est ou n'est pas constant, la classe des conjugués de A contient 1 ou p éléments. Les tableaux [0, const.] sont les éléments du centre.

Dans un système de tableaux conjugués, pour lesquels $a(x)$ n'est pas constant, on peut prendre pour tableau réduit, celui dont le coefficient du deuxième terme est nul

$$A = [o,\ a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0].$$

Sous-groupes de $\mathfrak{P}_2$. — Premier cas. — Les tableaux du sous-groupe $\mathfrak{H}$ ont tous leur première coordonnée nulle; alors $\mathfrak{H}$ est sous-groupe de $\mathfrak{D}_1$, qui est un groupe élémentaire d'ordre p^p, dont on sait former tous les sous-groupes.

Deuxième cas. — Il y a dans le sous-groupe $\mathfrak{H}$ au moins un tableau A dont la première coordonnée n'est pas nulle, et peut toujours être supposée égale à 1 (en remplaçant A par une puissance convenable A^i). Nous dirons qu'un tel sous-groupe est *essentiel*.

Lemme 19. — *Tout sous-groupe essentiel propre de* $\mathfrak{P}_2$ *est de la forme* $\{A, \mathfrak{Z}_m\}$, *c'est-à-dire est engendré par un tableau* $A = [1, a(x)]$ *et les tableaux d'un groupe* $\mathfrak{Z}_m$, *de la S. C. A.*

Ce lemme est vrai si $\mathfrak{H}$ est le groupe cyclique de base $A_1 = [1;o]$. Sinon, $\mathfrak{H}$ contient des tableaux dont la première coordonnée est nulle. En effet, à partir d'un tableau $B = [b, b(x)]$, qui n'est pas une puissance de A, il suffit de former

$$A^b B^{-1} = [o, c(x)] \qquad (B \neq A^b \text{ entraîne } c(x) \neq o).$$

L'ensemble des tableaux de $\mathfrak{H}$, dont la première coordonnée est ainsi nulle, forme un sous-groupe distingué $\overline{\mathfrak{H}}$ de $\mathfrak{H}$: il est élémentaire et $\mathfrak{H} \mid \overline{\mathfrak{H}}$ est cyclique d'ordre p, de sorte que $\mathfrak{H} = \{A, \overline{\mathfrak{H}}\}$.

Dans $\mathfrak{H}$, prenons un tableau $C = [o, c(x)]$, dont la hauteur m soit maximum, et formons, par récurrence, la suite

$$C_0 = C = [o, c(x)], \qquad C_l = (A, C_{l-1}), \qquad c_l(x) = c_{l-1}(x^{p^{m-1}}) - c_{l-1}(x).$$

$c_l(x)$ est de hauteur $m - l$. Le groupe $\{C_0, \ldots, C_m\}$, qui coïncide avec $\overline{\mathfrak{H}}$ contient tous les tableaux

$$[Q, d(x)], \quad h[d(x)] \leq m.$$

C'est le G. P. I. d'indicatrice $< o, m >$. Si $m < p$, c'est le groupe $\mathfrak{Z}_m$: si $m = p$, c'est le groupe $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{H}$ coïncide avec $\mathfrak{P}_2$ et n'est plus propre.

Théorème 13. — *Deux sous-groupes essentiels de* $\mathfrak{P}_2$ *sont isomorphes s'ils sont de même classe et ont même exposant.*

S'ils sont d'exposant p, ils sont conjugués (déduits l'un de l'autre par un automorphisme intérieur).

S'ils sont d'exposant p^2, *ils sont déduits l'un de l'autre par un automorphisme du groupe* $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{J}, \mathfrak{W}\}$.

Rappelons que l'*exposant* d'un groupe $\mathfrak{G}$ est le plus petit entier l tel que, pour tout élément de $\mathfrak{G}$, la puissance d'exposant l soit égale à l'unité. La classe d'un p-groupe est le nombre de termes de ses S. C. A. et S. C. D. (th. 3).

Le commutateur d'un sous-groupe essentiel $\{A, \mathfrak{Z}_m\}$ est $\mathfrak{Z}_{m-1}$, donc d'ordre p^{m-1} et le groupe est de classe m. Pour que deux sous-groupes $\{A, \mathfrak{Z}_m\}$, $\{B, \mathfrak{Z}_{m'}\}$ soient isomorphes, il est donc nécessaire que $m = m'$, donc qu'ils soient de même classe.

Si A est d'ordre p, il en est de même de tout élément de $\{A, \mathfrak{Z}_m\}$, car $|\{A, \mathfrak{Z}_m\}|_2 \leq p-1$ [D'après la terminologie de Dickson et Miller, c'est un groupe conforme au groupe abélien de type $(p, \ldots, p)$]. Donc deux sous-groupes essentiels $\{A, \mathfrak{Z}_m\}$ et $\{B, \mathfrak{Z}_m\}$ ne peuvent être isomorphes que si A et B sont à la fois d'ordre p, ou d'ordre p^2. Reste à montrer que ces conditions sont suffisantes.

Premier cas. — A et B sont d'ordre p. Il existe un automorphisme intérieur qui transforme A en B; comme il laisse invariant $\mathfrak{Z}_m$ (qui est caractéristique), il transforme $\{A, \mathfrak{Z}_m\}$ en $\{B, \mathfrak{Z}_m\}$.

Deuxième cas. — A et B sont d'ordre p^2. Il existe alors un automorphisme, dans le groupe $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{Z}, \mathfrak{W}\}$ qui transforme A en B, et par suite $\{A, \mathfrak{Z}_m\}$ en $\{B, \mathfrak{Z}_m\}$.

Dans chacun de ces cas, on peut aisément distinguer des tableaux *réduits*

$$\text{exp. } p \text{ , classe } m : [1, a_{p-2}x^{p-2} + a_{p-3}x^{p-3} + \ldots + a_m x^m],$$
$$\text{exp. } p^2, \text{ classe } m : [1, a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \ldots + a_m x^m], \quad a_{p-1} \neq 0.$$

Il y a donc p^{p-m-1} sous-groupes différents du premier type et $(p-1)p^{p-m-1}$ sous-groupes différents du deuxième type.

INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES.

1. A. Kourosch, *Théorie des groupes*, Moscou, 1944.
2. A. Speiser, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 3 Aufl., Berlin, 1937.
3. H. Zassenhauss, *Lehrbuch des Gruppentheorie*, Berlin-Leipzig, 1937.
4. Ph. Hall, *A contribution to the theorie of groups of prime power order* (*Proc. of London Math. Soc.*, 36, 1933, p. 29-95).
5. G. A. Miller, *Determination of all groups of order p^m* (*Bull. of Amer. Math. Soc.*, Série 2, Vol. 8, 1902, p. 391).
6. Brahana, *On isomorphisms of abelian groups of type* $(1, \ldots, 1)$ (*Amer. Journ.*, Vol. LVI, 1934, p. 53-61).
7. A. Chatelet, *Les groupes abéliens finis*, Paris-Lille, 1925.

SUR

QUELQUES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

PAR M. NICOLAS PASTIDÈS.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $f_n(z)=z$.

1. *Notations.* — Nous représentons par $f_2(z)$ la fonction $f[f(z)]$ et par $f_n(z)$ la fonction $f[f_{n-1}(z)]$ c'est-à-dire la $n^{\text{ième}}$ itérée de $f(z)$. Par $f_{-1}(z)$, $F_{-1}(z)$, ..., nous représentons respectivement les fonctions inverses de $f(z)$, $F(z)$, ... E désignant un domaine, nous représentons par $f(E)$ le transformé de E par la fonction $f(z)$.

2. *Fractions rationnelles vérifiant l'équation* $f_n(z)=z$. — Considérons la fraction rationnelle $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ quotient des deux polynomes premiers entre eux $P(z)$ et $Q(z)$ de degrés p et q. Soit k le plus grand des nombres p et q, k s'appelle le degré de la fraction. On vérifie aisément que le degré de $R_n(z)$, est exactement k^n. Il s'ensuit que, pour que l'on ait $R_n(z)\equiv z$, il est nécessaire que $R(z)$ soit une fraction de degré un, c'est-à-dire que la substitution $[z, R(z)]$ soit une substitution homographique. Or, les seules substitutions homographiques ayant la propriété $R_n(z)\equiv z$, sont les substitutions linéaires elliptiques d'ordre n. En posant $u=R(z)$ elles sont données par $\frac{u-z_1}{u-z_2}=e^{\frac{2ki\pi}{n}}\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2}$, z_1 et z_2 étant les points fixes de la substitution et k un entier premier avec n. Si z_2 est le point de l'infini, u est donné par $u-z_1=e^{\frac{2ki\pi}{n}}(z-z_1)$.

3. *Fonctions, autres que celles données par les substitutions linéaires elliptiques, vérifiant l'équation* $f_n(z)=z$. — Si $\varphi(z)$ désigne une fonction qui vérifie l'équation $\varphi_n(z)\equiv z$, toute fonction de la forme $f(z)=F_{-1}[\varphi[F(z)]]$ la

vérifie aussi, pourvu que $F(z)$ soit univalente dans le domaine que nous considérons et que, dans ce domaine, $F_{-1}\left[\varphi[F(z)]\right]$ et ses itérées soient définies. En effet $f_n(z)=F_{-1}\left[\varphi_n[F(z)]\right]=F_{-1}[F(z)]=z$. Remarquons aussi que, si z_0 est un point double de la transformation $Z=\varphi(z)$, $F_{-1}(z_0)$ est un point double de la transformation $Z=f(z)$ de plus, le multiplicateur est le même.

4. Théorème I. — *Si une fonction $f(z)$ a les propriétés suivantes :* 1° $f(z_0)=z_0$; 2° *Il existe un domaine* D *renfermant z_0, dans lequel $f(z)$ est holomorphe et vérifie l'équation $f_n(z)=z$. On conclut alors, qu'il existe un domaine* E *simplement connexe qui renferme z_0, et qui est transformé biunivoquement en lui-même par la fonction $f(z)$.*

Établissons d'abord le lemme suivant.

Lemme I. — *Si n domaines bornés simplement connexes* $D_1, D_2, \ldots, D_n$ *ont un point intérieur z_0 commun, alors le plus grand domaine connexe* E *qui renferme z_0, et qui appartient à l'intersection des n domaines* $D_1, D_2, \ldots, D_n$ *est lui-même simplement connexe.*

En effet une condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine borné connexe soit simplement connexe, est que toute courbe de Jordan simple et fermée, formée de points du domaine, ait tout son intérieur qui appartient aussi au domaine (1).

Démonstration du théorème. — Montrons d'abord que $|f'(z_0)|=1$. En dérivant $f_n(z)=z$ on obtient $f'[f_{n-1}(z)]\times f'[f_{n-2}(z)]\times\ldots\times f'(z)=1$, ce qui, pour $z=z_0$, donne $[f'(z_0)]^n=1$. Il s'ensuit que $f(z)$ est univalente au voisinage de z_0. Soit D_0 un domaine simplement connexe renfermant z_0, et tel que ses transformés $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, D_n=D_0$ par les itérées de $f(z)$, soient tous à l'intérieur du domaine d'holomorphie et d'univalence de $f(z)$. Ces domaines sont simplement connexes, aucun d'eux ne se recouvre, et ils ont tous z_0 comme point intérieur. Il existe donc, d'après le lemme I, un plus grand domaine connexe E, commun à $D_0, D, \ldots, D_{n-1}$ qui renferme z_0, et qui est simplement connexe. Nous allons montrer maintenant que $f(z)$ transforme E biunivoquement en lui-même. En effet, comme E fait partie des domaines $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$, son transformé par $f(z)$, fait partie des domaines $f(D_0)=D_1, f(D_1)=D_2, \ldots, f(D_{n-1})=D_n=D_0$. D'autre part $f(E)$ est simplement connexe et renferme z_0 comme point intérieur. Comme E est le plus grand domaine ayant ces propriétés, on a $f(E)\subset E$. Mais si $f(E)$ était une partie propre de E, c'est-à-dire si l'on n'avait pas $f(E)=E$, alors $f_2(E)\subset f(E)$

(1) Voir Julia, *Principes géométriques d'Analyse*, t. I, p. 10.

serait une partie propre de E, et en continuant on obtiendrait que $f_n(E)$ serait une partie propre de E, alors que l'on a $f_n(E) = E$.

La transformation de E en lui-même par $f(z)$ est biunivoque car $f(z)$ est univalente dans D_0 donc dans (E) (¹).

5. Théorème II. — *La fonction $f(z)$ satisfaisant aux mêmes conditions que dans le théorème* I, *il existe une infinité de fonctions* $F(z)$, *holomorphes et univalentes au voisinage de z_0 et telles que l'on ait, dans ce voisinage,*

$$f(z) = F_{-1}\left[e^{\frac{2ki\pi}{n}} F(z)\right] \quad \text{avec} \quad F(z_0) = 0, \qquad f'(z_0) = e^{\frac{2ki\pi}{n}} \neq 1.$$

En effet considérons un des domaines E, dont l'existence a été prouvée au théorème I. Il existe une fonction $F(z)$, holomorphe et univalente dans E, qui fait la représentation conforme de E avec l'intérieur du cercle unité, en faisant correspondre z_0 à l'origine.

Posons $\varphi(z) = F\left[f[F_{-1}(z)]\right]$. La fonction $\varphi(z)$ a les propriétés suivantes :

1° Elle est holomorphe et univalente à l'intérieur du cercle unité;

2° Elle transforme biunivoquement l'intérieur du cercle unité avec lui-même. En effet $F_{-1}(z)$ fait la représentation conforme de l'intérieur du cercle unité avec E, $f(z)$ transforme E en lui-même, et $F(z)$ tranforme E avec l'intérieur du cercle unité.

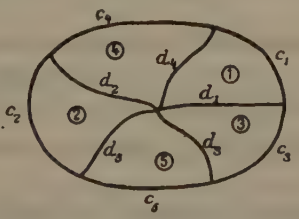
3° $\qquad \varphi_n(z) \equiv z \qquad$ car $\qquad \varphi_n(z) \equiv F\left[f_n[F_{-1}(z)]\right] \equiv F[F_{-1}(z)] \equiv z$;

4° $\qquad \varphi(0) = 0 \qquad$ et $\qquad \varphi'(0) = f'(z_0)$.

Il résulte des propriétés 1° et 2°, que $\varphi(z)$ est une fonction homographique, de la propriété 3, que c'est une substitution linéaire elliptique périodique, et

---

(¹) Nous pouvons aussi donner du théorème I. la démonstration suivante que nous esquissons. Supposons pour simplifier l'écriture que $f_0(z) \equiv z$ et que $f'(z_0) = e^{\frac{4\pi i}{5}}$. Soit d_1 un petit segment de droite d'origine z_0 et d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 se confondant avec d_1, les transformés de d_1 par les itérées



de $f(z)$. Ces arcs ont la disposition ci-contre du fait que $f'(z_0) = e^{\frac{4i\pi}{5}}$. Joignons par un arc c_1 l'extrémité de d_1 à l'extrémité de d_4 et soit c_2, c_3, c_4, c_5 les transformés de c_1 par les itérées de $f(z)$. On a ainsi cinq secteurs 1, 2, 3, 4, 5 qui se permutent circulairement par $f(z)$: l'ensemble de ces cinq secteurs est le domaine cherché.

de la propriété 4° que c'est une rotation d'ordre n. Donc $\varphi(z)=e^{\frac{2ki\pi}{n}}.z$ avec k entier premier avec n [on suppose que l'on n'a pas $f_p(z)=z$ avec $p<n$] et $e^{\frac{2ki\pi}{n}}=f'(z_0)$.

Nous avons donc

$$e^{\frac{2ki\pi}{n}}z=\mathrm{F}[f[\mathrm{F}_{-1}(z)]],\qquad \text{d'où}\quad f(z)=\mathrm{F}_{-1}\left[e^{\frac{2ki\pi}{n}}\mathrm{F}(z)\right].$$

Remarquons que $\mathrm{F}(z)$ n'est pas unique. Car si $\mathrm{F}^1(z)$ est une fonction particulière, ayant les propriétés requises, il en est de même de $\mathrm{F}(z)=\sum_{q=0}^{\infty}c_q[\mathrm{F}^1(z)]^{nq+1}$ où $c_0\neq 0$ et la série entière $\sum_{q=0}^{\infty}c_q u^{nq+1}$ ayant un rayon de convergence non nul.

Nous verrons plus loin dans la discussion de l'équation $\mathrm{F}[f(z)]=e^{\frac{2ki\pi}{n}}f(z)$, que ce sont là les seules fonctions $\mathrm{F}(z)$ ayant les propriétés de l'énoncé.

Avant de faire cette discussion, nous établirons quelques propriétés des transformations périodiques permutables.

6. Théorème III. — *Soit $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions holomorphes au voisinage de z_0, et ayant les propriétés suivantes :*

1° $\qquad f(z_0)=z_0,\qquad g(z_0)=z_0;$

2° $\qquad f_n(z)\equiv z,\qquad g_m(z)\equiv z,$

n et m étant les plus petits entiers donnant ces relations.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$f[g(z)]=g[f(z)],$$

est qu'il existe une fonction $\mathrm{F}(z)$, holomorphe et univalente au voisinage z_0, et telle que l'on ait

$$f(z)=\mathrm{F}_{-1}[e^{i\theta_1}\mathrm{F}(z)],\qquad g(z)=\mathrm{F}_{-1}[e^{i\theta_2}\mathrm{F}(z)].$$

La condition est manifestement suffisante, démontrons qu'elle est nécessaire. Pour cela nous supposons $f(z)$ et $g(z)$ permutables, et nous prouvons l'existence d'un domaine E simplement connexe borné, renfermant z_0, et qui soit transformé biunivoquement en lui-même en même temps par $f(z)$ et par $g(z)$.

Soit E_0 un domaine simplement connexe qui renferme z_0, borné, et qui est transformé biunivoquement en lui-même par $f(z)$. Considéronsles transformés $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_{m-1}, \mathrm{E}_m=\mathrm{E}_0$, de E_0 par les itérées de $g(z)$. Soit E le plus grand domaine connexe renfermant z_0 et contenu dans $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_{m-1}$. Comme E_0 peut être choisi dans un cercle de centre z_0 et de rayon aussi petit que l'on

veut, on le choisit de façon que $E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}$ existent et qu'aucun d'eux n'empiète sur lui-même. D'après la démonstration du théorème I, E est simplement connexe et il est transformé en lui-même biunivoquement par $g(z)$. Montrons que E est aussi transformé en lui-même par $f(z)$.

Considérons $f(E_j)$, le domaine transformé de E_j par $f(z)$ et prouvons que $f(E_j) = E_j$ pour tout j. Nous avons $f(E_0) = E_0$ d'après le choix même de E_0. Supposons que $f(E_j) = E_j$ pour un certain j et prouvons que $f(E_{j+1}) = E_{j+1}$. On a $E_{j+1} = g(E_j)$ donc $f(E_{j+1}) = f[g(E_j)]$ et d'après la relation $f[g(z)] = g[f(z)]$ on a $f(E_{j+1}) = g[f(E_j)]$ mais $f(E_j) = E_j$ donc $f[E_{j+1}] = g[E_j] = E_{j+1}$.

Cela étant, il s'ensuit de la démonstration du théorème I que $f(z)$ transforme biunivoquement en lui-même le domaine E.

En reprenant alors la démonstration du théorème II, on obtient qu'il existe une même fonction $F(z)$ (il en existe d'ailleurs un infinité) telle que l'on ait

$$f(z) = F_{-1}[e^{i\theta_1} F(z)], \qquad g(z) = F_{-1}[e^{i\theta_2} F(z)],$$

$F(z)$ étant holomorphe et univalente au voisinage de z_0 et s'y annulant, θ_1, θ_2 étant donnés par $e^{i\theta_1} = f'(z_0)$, $e^{i\theta_2} = g'(z_0)$.

Remarquons que dans les hypothèses de l'énoncé $Z = f[g(z)]$ est aussi une transformation périodique.

7. *Cas des transformations périodiques d'ordre 2.*

Théorème IV. — *Soit $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions holomorphes au voisinage de z_0 et telles que*

1° $\qquad f(z_0) = z_0, \qquad g(z_0) = z_0;$

2° $\qquad f_2(z) \equiv z, \qquad g_2(z) \equiv z,$

Alors : a. si $f[g(z)] = g[f(z)]$ on conclut que $f(z) \equiv g(z)$; b. si la transformation $Z = f[g(z)]$ est périodique on conclut encore que $f(z) \equiv g(z)$.

En effet la partie *a* est une conséquence immédiate du théorème III car dans le cas actuel où $f_2(z) \equiv g_2(z) \equiv z$ on a

$$f'(z_0) = g'(z_0) = -1 \qquad \text{donc} \qquad f(z) = g(z) = F_{-1}[-F(z)],$$

$F(z)$ étant la fonction définie dans le théorème III.

Démontrons la partie b. — D'après l'hypothèse et le théorème I, il existe des domaines simplement connexes ayant z_0 comme point intérieur, qui sont transformés biunivoquement en eux-mêmes par la transformation $Z = f[g(z)]$. Soit E_0 l'un de ces domaines. Posons $g(E_0) = E_1$ et soit E le plus grand domaine connexe, renfermant z_0, et commun à E_0 et E_1. On sait que E est simplement connexe et que $g(E) = E$. Prouvons que l'on a aussi $f(E) = E$.

Or $f[g(E_0)]=E_0$ ou $f(E_1)=E_0$. Donc $f(E_0)=f_2(E_1)=E_1$, ce qui prouve que $f(E)=E$. Donc $F(z)$ étant la fonction holomorphe et univalente dans E et qui fait la représentation conforme de E avec l'intérieur du cercle unité avec $F(z_0)=0$, on a

$$f(z)=g(z)=F_{-1}[-F(z)],$$

DEUXIÈME PARTIE.

DISCUSSION DE L'ÉQUATION $F[f(z)]=e^{\frac{2ki\pi}{n}}F(z)$ (1).

8. Considérons l'équation $F[f(z)]=e^{\frac{2ki\pi}{n}}F(z)$ où $f(z)$ est une fonction donnée telle que $f(z_0)=z_0$, z_0 étant un point donné, $f(z)$ étant holomorphe au voisinage de ce point. Sans diminuer la généralité du problème, nous pouvons supposer $z_0=0$. k est un entier $0<k\leq n$, et qui est premier avec n lorsqu'il lui est inférieur. Nous cherchons les fonctions $F(z)$ uniformes au voisinage de l'origine qui vérifient l'équation. Remarquons d'abord que si $F^1(z)$ est une solution de l'équation, il en est de même de $CF^1(z)$, C étant une constante arbitraire, et de $[F^1(z)]^{np+1}$, p étant un nombre entier positif ou négatif. Comme d'autre part si $F^1(z)$ et $F^2(z)$ sont deux solutions de l'équation il en est de même de leur somme, on en conclut que si $F^1(z)$ est une solution particulière, il en est de même des fonctions $\sum_{p=0}^{\infty}C_p[F^1(z)]^{np+1}$, $\sum_{p=r}^{\infty}C_p[F^1(z)]^{np+1}$, $\sum_{p=-n}^{\infty}C_p[F^1(z)]^{np+1}$ pourvu que les séries considérées soient convergentes.

On voit de là que si l'équation $F[f(z)]=e^{\frac{2ki\pi}{n}}F(z)$ admet une solution méromorphe $F^1(z)$, elle admet aussi la solution $[F^1(z)]^{-n+1}$, qui est holomorphe au voisinage de l'origine.

9. THÉORÈME V. — *Pour que l'équation* $F[f(z)]=e^{\frac{2ki\pi}{n}}F(z)$, *admette des solutions holomorphes ou méromorphes au voisinage de l'origine, il est nécessaire et suffisant :*

1° *qu'il existe un entier positif p tel que* $[f'(0)]^p=e^{\frac{2ki\pi}{n}}$;

2° *que la substitution* $[z, f(z)]$ *soit périodique ce qui entraîne que* $f'(0)\neq 1$ (2).

---

(1) L'équation $F[f(z)]=sF(z)$ a été étudiée par Kœnigs pour $|s|<1$ et par F. W. Bradley (*Proceedings of the Mathematical and Physical Society of Egypt*, 1947) dans le cas où $|s|>1$.

(2) La substitution $[z, f(z)]$ étant périodique on a $f_n(z)\equiv z$, ce qui, avec la condition 1°, donne d'après le théorème II $f(z)=F_{-1}\left[e^{\frac{2k'i\pi}{np}}F(z)\right]$, alors $f'(0)=e^{\frac{2k'i\pi}{np}}$ donc $f'(0)\neq 1$ sans quoi on aurait $f(z)\equiv z$.

Les conditions sont nécessaires. — Supposons en effet que l'équation ait une solution holomorphe $F(z)=b_0+b_pz^p+\dots$ puisque l'équation ne peut avoir de solutions méromorphes sans en avoir des solutions holomorphes aussi.

Soit

$$f(z)=sz+a_2z^2+\dots, \qquad s=f'(0).$$

1° Si $b_0\neq 0$ en substituant dans l'équation, $F(z)$ et $f(z)$ par leurs développements, on conclut que l'on doit avoir $e^{\frac{2ki\pi}{n}}=1$. Alors $F(z)\equiv C$, C étant une constante arbitraire, est solution de l'équation.

En laissant de côté le cas où $F(z)\equiv C$ seraient les seules solutions, nous allons montrer que les conditions énoncées sont nécessaires pour avoir des solutions de la forme $F(z)=b_pz^p+\dots$.

La substitution dans l'équation, nous donne alors $s^p=e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ qui est la première condition énoncée.

2° Passons à la deuxième condition en supposant la première vérifiée.

a. Si $p=1$, $F(z)=b_1z+b_2z^2+\dots$ est univalente au voisinage de l'origine; elle admet donc une fonction inverse $F_{-1}(z)$, et comme $F(z)$ vérifie par hypothèse l'équation, on a

$$f(z)=F_{-1}\left[e^{\frac{2ki\pi}{n}}F(z)\right],$$

ce qui donne

$$f'(0)=e^{\frac{2ki\pi}{n}} \qquad \text{et} \qquad f_n(z)\equiv z.$$

b. Si l'équation n'a pas de solution univalente au voisinage de l'origine, soit $F(z)=z^p(1+b_{p-1}z+\dots)$, avec $p>1$, une solution de l'équation (on peut toujours supposer $b_p=1$).

Soit $\varphi(z)=z(1+\beta z+\dots)$ telle que $[\varphi(z)]^p=F(z)$; $\varphi(z)$ vérifie l'une des équations

$$\varphi[f(z)]=e^{\frac{(2k+n\mu)i\pi}{np}}\varphi(z),\ \mu=0,1,2,\dots,(p-1),$$

à savoir celle pour laquelle $f'(0)=e^{\frac{2(k+n\mu)i\pi}{np}}=s$ donc $f(z)=\varphi_{-1}[s\varphi(z)]$, ce qui prouve que $f(z)$ vérifie bien la deuxième condition.

Les conditions sont suffisantes. — *a.* Si $f'(0)=e^{\frac{2ki\pi}{n}}$, $f(z)$ vérifie par hypothèse les conditions du théorème II de la première partie, et d'après ce même théorème l'équation $F[f(z)]=e^{\frac{2ki\pi}{n}}F(z)$ admet des solutions holomorphes et univalentes au voisinage de l'origine.

b. Si $[f'(0)]^p=e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ d'après le théorème II de la première partie l'équation $\varphi[f(z)]=s\varphi(z)$, où $s=f'(0)$, a des solutions holomorphes et univalentes au

voisinage de l'origine; $\varphi^1(z)$ étant l'une de celles-ci, $F(z)=[\varphi^1(z)]^p$ vérifie l'équation $F[f(z)]=e^{\frac{2ki\pi}{n}}F(z)$.

10. *Étude des solutions de l'équation* $F[f(z)]=e^{\frac{2ki\pi}{n}}F(z)$ *avec* $f'(0)=e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ *et* $f_n(z)\equiv z$.

10.1. Jusqu'à présent nous avons prouvé l'existence de solutions holomorphes au voisinage de l'origine, ou méromorphes, ou ayant l'origine comme point singulier essentiel non limite de zéros ou des pôles.

Nous allons montrer maintenant comment on peut déterminer effectivement une solution particulière, ou plutôt la fonction inverse de cette solution, par son développement en série de Taylor. Cette solution étant obtenue nous allons donner en fonction de celle-ci les expressions générales de toutes les solutions de la nature mentionnée. Nous appellerons, pour simplifier, équation S l'équation dont il est question.

10.2. Théorème VI. — *Posons* $F(z)=z+\sum_{q=2}^{\infty}b_qz^q$, *nous avons alors les propriétés suivantes :*

1° $b_2, b_3, \ldots, b_n$ *sont déterminés et les mêmes pour toutes les fonctions* $F(z)$ *qui vérifient l'équation* S;

2° *si l'on se donne une suite de* m *nombres* $c_1, c_2, \ldots, c_m$, *il existe une infinité de fonctions* $F(z)$ *qui vérifient l'équation* S *et telles que* $b_{nj+1}=c_j$ *pour* $j=1, 2, \ldots, m$; *les* b_q, $q\leq nm$, *sont alors déterminés;*

3° *si l'on se donne une suite infinie* $\{c_j\}$ *il existe une série entière* $F(z)=z+\sum_{q=2}^{\infty}b_qz^q$ *bien déterminée, dont le rayon de convergence peut être nul* (1), *telle que* $b_{nj+1}=c_j$ *pour* $j=1, 2, \ldots$ *et qui vérifie formellement l'équation* S.

Commençons par prouver le 2°. — Nous savons qu'il existe une fonction $F^1(z)=z+b'_2z^2+b'_3z^3+\ldots$, la série étant convergente dans un certain cercle de centre l'origine, vérifiant l'équation S. $F^1(z)$ étant supposée déterminée, la fonction $F(z)=\sum_{p=0}^{\infty}C_p[F^1(z)]^{np+1}$, où $\overline{\lim_{p\to\infty}}\sqrt[np+1]{|C_p|}<\infty$, est aussi

(1) Dans le cas où le rayon de convergence de la série $z+\sum_{q=2}^{\infty}b_qz^q$ est nul nous continuons à la désigner par $F(z)$, bien qu'elle ne représente pas de fonction. Avec une pareille série on peut toujours avoir des relations et des opérations formelles. Ainsi $F[f(z)]$ représentera la série entière que l'on obtient en substituant formellement dans la série $F(z)$, la série $f(z)$ à z. Si la série qui en résulte a les mêmes coefficients que ceux de $F(z)$ multipliés par s, nous dirons que $F[f(z)]=sF(z)$ est vérifiée formellement.

une solution. On peut alors prendre $C_0 = 1$ et choisir $C_1, C_2, \ldots, C_m$ de façon qu'en posant

$$\sum_{p=0}^{\infty} C_p [F^1(z)]^{np+1} = z + \sum_{q=2}^{\infty} b_q z^q$$

on ait

$$b_{nj+1} = c_j \qquad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, m,$$

ce qui prouve le 2°.

Pour prouver les 1° et 3° posons

$$f(z) = sz + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$
$$[f(z)]^p = s^p z^p + A_{p,p+1} z^{p+1} + \ldots + A_{p,p+q} z^{p+q} + \ldots :$$

$A_{p,p+q}$ est un polynome à coefficients positifs par rapport à $s, a_2, a_3, \ldots, a_{p+q}$. En posant toujours $F(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$ et en substituant dans $F[f(z)] = sF(z)$ on obtient pour la détermination des b_q les équations récurrentes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}
s = s, \\
a_2 = (s - s^2) b_2, \\
a_3 + A_{2,3} b_2 = (s - s^3) b_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_n + A_{2,n} b_2 + A_{3,n} b_3 + \ldots + A_{n-1,n} b_{n-1} = (s - s^n) b_n, \\
a_{n+1} + A_{2,n+1} b_2 + A_{3,n+1} b_3 + \ldots + A_{n,n+1} b_n = (s - s^{n+1}) b_{n+1} \qquad \text{(remarquons que } s - s^{n-1} = 0\text{)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_{nk+1} + A_{2,nk+1} b_2 + \ldots + A_{nk,nk+1} b_{nk} = (s - s^{nk+1}) b_{nk+1} \qquad (s - s^{nk-1} = 0), \\
a_{nk+2} + A_{2,nk+2} b_2 + \ldots + A_{nk+1,nk+2} b_{nk+1} = (s - s^{nk+2}) b_{nk+2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}\right.$$

les n premières équations donnent $b_2, b_3, \ldots, b_n$, ce qui prouve le 1°. D'autre part d'après le 2° si l'on prend $b_{nj+1} = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ où la suite $c_1, c_2, \ldots, c_m$ est arbitraire, il existe une solution (il en existe même une infinité) $F(z) = z + \sum_{q=2}^{\infty} b_q z^q$ avec $b_{nj+1} = c_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Les coefficients de cette solution vérifient nécessairement les équations récurrentes (E), et comme m peut être quelconque, on en conclut le n° 3 du théorème.

Remarque. — La suite $\{c_j\}$ peut être choisie de façon que la série $F(z)$ dont les coefficients sont donnés par les équations récurrentes (E), et qui vérifie formellement l'équation $F[f(z)] = sF(z)$, soit divergente quel que soit z. Il suffit en effet de choisir $\{c_j\}$ de façon que $\overline{\lim_{j=\infty}}\sqrt[nj+1]{|c_j|} = \infty$. Remarquons aussi que les relations $F[f(z)] = sF(z)$ et $f(z) = F_{-1}[sF(z)]$, qui sont équivalentes quand $F(z)$ et $f(z)$ sont des séries entières convergentes, restent encore équivalentes quand l'une de ces séries, ou bien les deux ont des rayons de

convergence nuls (¹). Dans ce dernier cas $F_{-1}(z)$ est la série entière qui vérifie formellement la relation $F[F_{-1}(z)] \equiv z$.

De ce qui précède, on conclut que si $F(z)$ est une série entière dont le rayon de convergence est nul, en formant formellement la série $F_{-1}[sF(z)]$ où s est une constante, cette nouvelle série peut avoir un rayon de convergence positif.

10.3. Considérons l'équation

$$f[\varphi(z)] = \varphi(sz), \tag{1}$$

où

$$s = f'(0) = e^{\frac{2ki\pi}{n}} \qquad \text{et} \qquad f_n(z) \equiv z.$$

Si $\varphi^1(z)$ en est une solution holomorphe et univalente au voisinage de l'origine, la fonction inverse de $\varphi^1(z)$, soit $F^1(z) = \varphi^1_{-1}(z)$, est une solution de l'équation

$$F[f(z)] = sF(z), \tag{2}$$

et réciproquement.

Soit $F^1(z) = z + b_2 z^2 + \dots$ une solution de (2) et $\varphi^1(z) = F^1_{-1}(z)$, nous posons

$$\varphi^1(z) = z + \beta_2 z^2 + \dots.$$

Si $F^1(z)$ a un rayon de convergence nul et vérifie formellement l'équation (2), $\varphi^1(z)$ a aussi un rayon de convergence nul, et vérifie formellement l'équation (1).

Relativement à $\varphi^1(z)$ nous avons le théorème suivant qui est analogue au théorème VI.

THÉORÈME VI *bis*. — 1° $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ *sont déterminés et les mêmes pour toutes les fonctions* $\varphi(z) = z + \sum_{2}^{\infty} \beta_q z^q$ *qui vérifient l'équation* (1);

2° *si l'on se donne une suite de* m *nombres* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$, *il existe une infinité de fonctions* $\varphi(z)$ *qui vérifient l'équation* (1), *et telles que* $\beta_{nj+1} = \gamma_j$, $j = 1, 2, \dots, m$ *les* $\beta_j, j \leq nm$, *sont alors déterminés et les mêmes pour toutes ces fonctions;*

3° *si l'on se donne une suite infinie de nombres* $\{\gamma_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, *il existe une série entière* $\varphi(z) = z + \sum_{q=2}^{\infty} \beta_q z^q$ *bien déterminée, dont le rayon de convergence peut être nul, telle que* $\beta_{nj+1} = \gamma_j$, $j = 1, 2, \dots$, *et qui vérifie formellement l'équation* $f[\varphi(z)] = \varphi(sz)$.

(¹) Nous avons prouvé cette équivalence dans un Mémoire récent, qui est sous presse.

Ce théorème est une conséquence du théorème VI et des formules qui donnent les β en fonction des b.

On a en effet

$$\beta_n = -b_n + P_n(\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, b_2, \ldots, b_{n-1}),$$

où $P_n(\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, b_2, \ldots, b_{n-1})$ est un polynome en $\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, b_2, \ldots, b_{n-1}$. Cette expression de β_n nous permet de passer du théorème VI au théorème énoncé.

10.4. *Détermination effective d'une solution de* $f[\varphi(z)] = \varphi(sz)$ *holomorphe au voisinage de l'origine par son développement de Taylor.* — En posant toujours

$$f(z) = sz + a_2 z^2 + \ldots,$$
$$\varphi(z) = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots,$$

et en substituant dans l'équation $f[\varphi(z)] = \varphi(sz)$ nous obtenons, après identification des deux membres, les équations récurrentes suivantes

$$(E_1) \quad \begin{cases} (s^2 - s)\beta_2 = a_2\beta_1, \\ (s^3 - s)\beta_3 = 2a_2\beta_2 + a_3\beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (s^m - s)\beta_m = S_m(a_2, \ldots, a_m, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$\beta_1 = 1$, nous l'écrivons quand même, parce que cela nous servira pour la majoration du système.

S_m est un polynome à coefficients positifs linéaire par rapport aux a et non linéaire par rapport aux β.

Pour $m = nj + 1$, $j = 1, 2, \ldots$ les premiers membres des équations correspondantes du système (E_1) sont nuls; néanmoins le théorème VI *bis* nous permet de dire que si nous nous donnons arbitrairement une suite $\{\gamma_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$ de nombres, et si nous associons aux équations (E_1) les équations $\beta_{nj+1} = \gamma_j$, le système ainsi obtenu est possible et il détermine tous les β univoquement. La série ainsi obtenue $\varphi(z) = z + \sum_{q=2}^{\infty} \beta_q z^q$ vérifie formellement l'équation $f[\varphi(z)] = \varphi(sz)$. Nous allons montrer que nous pouvons choisir la suite γ_j de façon que la série $z + \sum_{q=2}^{\infty} \beta_q z^q$, qui lui correspond, ait un rayon de convergence positif.

Soit l le minimum des nombres $|s - s^2|$, $|s - s^3|$, $\ldots$, $|s - s^n|$ et 1. Posons $A_n = |a_n|$ et considérons la série entière $\Phi(z) = lz - \sum_{q=2}^{\infty} A_q z^q$ qui a un rayon de convergence positif. Posons $\Phi_{-1}(z) = \sum_{q=1}^{\infty} d_q z^q$ et écrivons les équations

récurrentes qui donnent les d en fonction des A et de l, que l'on obtient par l'identité $\Phi[\Phi_{-1}(z)] \equiv z$.

On obtient

$$l d_1 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad d_1 = \frac{1}{l} \geq 1 = \beta_1,$$

$$l d_2 = A_2 d_1^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$l d_m = S_m(A_2, \dots, A_m, d_1, d_2, \dots, d_{m-1}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Les polynomes S_m sont les mêmes que ceux qui figurent dans les équations (E_1). D'après le choix de l il s'ensuit que si dans les équations (E_1) on prend $|\beta_{nj+1}| \leq d_{nj+1}$ pour $j = 1, 2, \dots$, la suite $\{\beta_q\}$ est complètement déterminée et l'on a que $|\beta_q| \leq d_q$ quel que soit q, donc la série correspondante $z + \sum_{q=2}^{\infty} \beta_q z^q$, a un rayon de convergence positif (1).

11. *Expression générale des solutions uniformes au voisinage de l'origine en fonction de l'une d'entre elles.* — Soit l'équation

$$F[f(z)] = sF(z),$$

où

$$s = f'(0) = e^{\frac{2ki\pi}{n}} \neq 1, \qquad f_n(z) \equiv z$$

et

$$F^1(z) = z + b_2 z^2 + \dots,$$

une solution particulière de l'équation. Comme $F^1(z)$ est holomorphe et univalente au voisinage de l'origine son inverse $F^1_{-1}(z)$ existe.

Appliquons à l'équation la transformation $F(z) = \Phi[F^1(z)]$; elle devient

$$\Phi[F^{-1}[f(z)]] = s\Phi[F^1(z)] \qquad \text{ou} \qquad \Phi[sF^1(z)] = s\Phi[F^1(z)]$$

et en posant aussi

$$F^1(z) = Z,$$

cette équation devient

$$\Phi[sZ] = s\Phi(Z).$$

En utilisant le développement de $\Phi(Z)$, en série de Taylor si l'on cherche les fonctions holomorphes, ou en série de Laurent si l'on cherche les fonctions méromorphes à l'origine ou ayant ce point comme singularité essentielle, sans

(1) La méthode de majoration que nous avons suivie, est celle qui a été employée par F. W. Bradley dans le cas où $|s| > 1$.

que ce soit point limite de zéros ou de pôles, nous obtenons en tenant compte de ce que $s = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$:

pour $\Phi(Z)$ holomorphe $\Phi(Z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p Z^{np+1}$;

pour $\Phi(Z)$ méromorphe $\Phi(Z) = \sum_{p=-r}^{\infty} C_p Z^{np+1}$, r entier positif;

pour $\Phi(Z)$ ayant à l'origine un point singulier essentiel

$$\Phi(Z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p Z^{np+1},$$

en revenant à $F(z)$, on obtient les solutions holomorphes au voisinage de $z = 0$, qui sont données par

$$F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_k [F^1(z)]^{np+1},$$

les solutions méromorphes qui sont données par

$$F(z) = \sum_{p=-r}^{\infty} C_p [F^1(z)]^{np+1},$$

et les solutions ayant l'origine comme point singulier essentiel, non limite de zéros ou de pôles, qui sont données par

$$F(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p [F^1(z)]^{np+1}.$$

A condition bien entendu que les séries écrites soient convergentes.

12. *Remarques diverses.* — Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions holomorphes dans un cercle de centre l'origine et ayant les propriétés suivantes :

$$f(0) = g(0) = 0, \qquad f'(0) = g'(0) = s = e^{\frac{2ki\pi}{n}}, \qquad f_n(z) \equiv g_n(z) \equiv z.$$

1. Cherchons les solutions en $F(z)$ de l'équation

$$F[f(z)] = F(z). \tag{1}$$

soit $F^1(z)$ une solution holomorphe et univalente au voisinage de l'origine de l'équation $\Phi[f(z)] = s\Phi(z)$.

Nous savons que toutes les solutions développables en série de Taylor ou de Laurent au voisinage de l'origine sont données par

$$\sum_{p=0}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}, \quad \sum_{p=-r}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}, \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}.$$

Or, si dans l'équation (1) nous appliquons le changement de fonction inconnue $F(z)=\frac{\Phi(z)}{F^1(z)}$, $\Phi(z)$ étant la nouvelle fonction inconnue, cette équation devient

$$\Phi[f(z)]=s\Phi(z)$$

et aux solutions de la nature indiquée de $\Phi(z)$, correspondent des solutions de même nature pour $F(z)$. Donc les solutions holomorphes ou méromorphes ou ayant l'origine comme point singulier essentiel, sans qu'il soit point limite de zéros ou de pôles, sont données par

$$\frac{\sum_{p=0}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}}{F^1(z)}, \quad \frac{\sum_{p=-r}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}}{F^1(z)} \quad (r \text{ entier positif}), \quad \frac{\sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}}{F^1(z)}.$$

II. Cherchons les solutions en $F(z)$ de l'équation

$$F[f(z)]=g[F(z)]. \tag{2}$$

Soit $G^1(z)=z+c_2z^2+\dots$ une fonction holomorphe et univalente au voisinage de l'origine, fonction dont nous avons prouvé l'existence, qui vérifie l'équation

$$G(sz)=g[G(z)] \qquad \text{pour} \quad |z|<r,$$

si nous posons

$$F(z)=G^1[\Phi(z)],$$

l'équation (2) devient

$$\Phi[f(z)]=s\Phi(z). \tag{3}$$

Nous cherchons les solutions $\Phi(z)$ telles que $|\Phi(z)|<r$ pour $|z|<r'$. Or nous avons prouvé l'existence de solutions holomorphes de l'équation (3) qui s'annulent à l'origine.

$\Phi^1(z)=z+b_2z^2+\dots$ étant l'une d'entre elles, toutes les autres sont données par $\Phi(z)=\sum_{p=0}^{\infty} C_p[\Phi^1(z)]^{np+1}$.

Donc toutes les solutions de (2) holomorphes au voisinage de $z=0$ sont données par

$$F(z)=G^1[\Phi(z)] \qquad \text{ou} \qquad F(z)=G^1\left[\sum_{p=0}^{\infty} C_p[\Phi^1(z)]^{np+1}\right].$$

III. *Fonctions holomorphes au voisinage de l'origine s'y annulant et permutables avec $f(z)$.* — Si dans l'équation (2) nous prenons $g(z)=f(z)$ elle devient $F[f(z)]=f[F(z)]$ et ses solutions sont les fonctions qui au voisinage de l'origine se permutent avec $f(z)$. Donc d'après la remarque II toutes les fonctions holomorphes au voisinage de l'origine s'y annulant, et se permutant avec $f(z)$, sont données par

$$F(z)=F_{-1}^{1}\left[\sum_{p=0}^{\infty}C_p[F^1(z)]^{np+1}\right],$$

où $F^1(z)$ est une solution holomorphe et univalente au voisinage de $z=0$, de l'équation

$$F[f(z)]=sF(z).$$

IV. Si nous n'imposons pas de conditions particulières aux solutions de $F[f(z)]=sF(z)$ que nous cherchons, nous pouvons alors choisir arbitrairement $F(z)$ dans le secteur (1) dont il a été question dans la Note de la page 279. $F[f(z)]=sF(z)$ prolonge $F(z)$ dans le secteur (2) et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi une fonction $F(z)$ définie dans tout le domaine E et qui vérifie l'équation.

V. L'équation $F[f(z)]=m[F(z)]^p$ ne peut avoir d'autres solutions que des constantes. En effet elle donne

$$F[f_n(z)]=m^{1-p-p^2-\ldots-p^{n-1}}[F(z)]^{p^n},$$

mais

$$f_n(z)\equiv z \quad \text{donc} \quad F(z)=m^{1-p-p^2-\ldots-p^{n-1}}[F(z)]^{p^n},$$

ce qui donne $F(z)=$ constante.

13. *Quelques remarques sur la substitution formelle d'une série entière dans une autre série entière.* — Soit $F(z)=z+b_2z^2+b_3z^3+\ldots$ une série entière, nous avons montré que si son rayon de convergence est nul, il peut arriver que le rayon de convergence de la série $F_{-1}[sF(z)]$ où $s=e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ soit positif. Une question qui se pose c'est de savoir si le rayon de convergence de $F_{-1}[sF(z)]$ peut être nul. Cette question se traite en même temps que la suivante :

Si $f(z)=sz+a_2z^2+\ldots$ est une série entière dont le rayon de convergence est nul, peut-il arriver que l'on ait formellement $f_n(z)\equiv z$?

Reprenons les équations (E_1) de la page 287, en précisant la forme des polynomes S_m.

Nous avons

$$\varphi(z)=z+\beta_2z^2+\ldots$$

et nous posons

$$[\varphi(z)]^p=z^p+B_{p,p+1}z^{p+1}+\ldots+B_{p,p+q}z^{p+q}+\ldots$$

Les équations (E_1) s'écrivent alors

$$(E_2)\quad \begin{cases} (s^2-s)\beta_2 = a_2, \\ (s^3-s)\beta_3 = B_{2,3}a_2 + a_3, \\ (s^4-s)\beta_4 = B_{2,4}a_2 + B_{3,4}a_3 + a_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (s^m-s)\beta_m = B_{2,m}a_2 + B_{3,m}a_3 + \dots + B_{m-1,m}a_{m-1} + a_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

De la forme de ces équations on déduit, que si l'on se donne tous les a_k pour lesquels $k \neq pn+1$, $p = 1, 2, \dots$, et les β_{pn+1}, $p = 1, 2, \dots$, le système (E_2) nous donne les a_{pn+1}, $p = 1, 2, \dots$, et les β_k pour $k \neq pn+1$, $p = 1, 2, \dots$.

On détermine ainsi deux séries entières dont les rayons de convergence peuvent être nuls soit

$$f(z) = sz + a_2 z^2 + \dots \qquad \text{et} \qquad \varphi(z) = z + \beta_2 z^2 + \dots,$$

telles que l'on ait formellement

$$f[\varphi(z)] = \varphi(sz),$$

relation équivalente à $F[f(z)] = sF(z)$ où $F(z) = \varphi_{-1}(z)$, d'où l'on peut écrire

$$f(z) = F_{-1}[sF(z)].$$

Il s'ensuit que l'on a formellement

$$f_n(z) = F_{-1}[s^n F(z)]$$

et comme $s = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$, on en conclut

$$f_n(z) \equiv z.$$

Donc dans $f(z)$ on peut choisir arbitrairement tous les a_k pour lesquels $k \neq np+1$, $p = 1, 2, \dots$, et déterminer les a_{np+1}, $p = 1, 2, \dots$, de façon que l'on ait formellement $f_n(z) \equiv z$. On peut alors faire le choix des a_k, $k \neq np+1$ de façon que $f(z) = sz + a_2 z^2 + \dots$, soit une série entière à rayon de convergence nul. Dans ces conditions $F(z)$ a aussi un rayon de convergence nul.

TROISIÈME PARTIE.

FONCTIONS PERMUTABLES.

14. *Généralisation du théorème* III, *Première partie*, n° 6.

14.1. Théorème VII. — *Soit* $f^1(z), f^2(z), \dots, f^k(z)$ [1] *un nombre fini de fonctions ayant les propriétés suivantes :*

1° $f^j(0) = 0$, *pour tout* $j = 1, 2, \dots, k$;

[1] Les indices supérieurs servent à différencier les fonctions les unes des autres.

2° *A chacune des fonctions* $f^j(z)$, *correspond un entier* $n_j > 0$ *tel que* $f^j_{n_j}(z) \equiv z$; n_j *est le plus petit entier ayant cette propriété;*

3° *On a* $f^i[f^j(z)] \equiv f^j[f^i(z)]$ *quels que soient* $i, j = 1, 2, \ldots, k$.

On en conclut qu'il existe une fonction $F(z)$ (*il en existe même une infinité*) *telle que l'on ait* $f^j(z) = F_{-1}[s_j F(z)]$ avec $s_j = \left[\frac{df^j(z)}{dz}\right]_{z=0}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Il suffit de montrer qu'il existe un domaine E simplement connexe, ayant l'origine comme point intérieur et qui est transformé biunivoquement en lui-même par chacune des fonctions $f^1(z), f^2(z), \ldots, f^k(z)$. Nous avons vu dans le n° 6, Première Partie, que le théorème est vrai dans le cas de deux fonctions. Supposons qu'il soit vrai pour le cas de $k-1$, fonctions et démontrons qu'il est vrai pour k.

En représentant alors par E^0 un domaine simplement connexe renfermant l'origine, invariant par chacune des fonctions $f^1(z), f^2(z), \ldots, f^{k-1}(z)$ et par E le plus grand domaine connexe, renfermant l'origine et commun à E_0 et aux transformés de E_0 par les itérées de $f^k(z)$, on démontre comme dans le n° 6 que E satisfait aux conditions voulues.

14.2. Corollaires. — I. *Si les fonctions* $f^1(z), f^2(z), \ldots, f^k(z)$ *satisfont aux conditions du théorème* VII, *ces fonctions sont les itérées d'une même fonction* $f(z) = F_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{\nu}} F(z)\right]$ où ν *est un multiple de* $n_1, n_2, \ldots, n_k$;

II. *Si* $f^1(z), f^2(z), \ldots, f^k(z)$ *sont des fonctions distinctes, satisfaisant aux conditions du théorème* VII, *avec* $n_1 = n_2 = \ldots = n_k$, *leur nombre est égal au plus à* n_1.

14.3. Théorème VIII. — *Soit* $f^1(z), f^2(z), \ldots, f^j(z), \ldots$ *une suite infinie de fonctions distinctes ayant les propriétés suivantes :*

1° $f^j(0) = 0$, *quel que soit* j;

2° *Il existe une suite* $\{n_j\}$ *d'entiers positifs tels que* $f^j_{n_j}(z) \equiv z$ *pour tout* j: n_j *est supposé être le plus petit entier pour lequel cette relation est vérifiée*;

3° $f^i[f^j(z)] \equiv f^j[f^i(z)]$, *quels que soient* i *et* j.

Alors, il existe une série entière et une seule de la forme $F(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$ *telle que l'on ait formellement, quel que soit* j, $f^j(z) = F_{-1}[s_j F(z)]$, *avec* $s_j = \left[\frac{df^j(z)}{dz}\right]_{z=0}$. *La série* $F(z)$ *peut avoir un rayon de convergence positif ou nul.*

D'après le corollaire II qui précède, les fonctions de la suite $\{f^j(z)\}$ auxquelles correspondent des n_j ayant une même valeur sont en nombre fini, par conséquent on a $\overline{\lim_{j\to\infty}} n_j = \infty$, et l'on peut aussi supposer les fonctions de la suite rangées de façon que l'on ait $n_{j+1} \geq n_j$ pour tout j.

Représentons alors par :

$F^1(z)$ une série entière commençant par z et telle que $f^1(z)=F^1_{-1}[s_1F^1(z)]$

$F^2(z)$ » » $f^j(z)=F^2_{-1}[s_jF^2(z)]$ pour $j\leqq 2$,

.....

$F^k(z)$ » » $f^j(z)=F^k_{-1}[s_jF^k(z)]$ pour $j\leqq k$,

et ainsi de suite. Ces séries existent d'après le théorème VII.

On obtient ainsi une suite infinie $\{F^k(z)\}$ de séries, qui n'est pas univoquement déterminée, mais qui est telle que, pour tout k, les n_k premiers coefficients de $F^k(z)$ sont bien déterminés, et ces coefficients restent les mêmes pour les séries $F^j(z)$ avec $j\geqq k$. Ceci est une conséquence du théorème VI.

Il s'ensuit que, si nous posons $F^k(z)=z+b_{k,2}z^2+\ldots+b_{k,m}z^m+\ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} b_{k,m}$ existe pour tout m. Posons $b_m=\lim\limits_{k\to\infty} b_{k,m}$. Nous obtenons ainsi une suite bien déterminée $b_2, b_3, \ldots, b_m, \ldots$, de coefficients, et nous appelons limite formelle de $F^k(z)$ pour $k\to\infty$ la série $F(z)=z+b_2z^2+\ldots+b_mz^m+\ldots$.

Cela étant nous allons prouver que l'on a quel que soit k, $f^k(z)=F_{-1}[s_kF(z)]$. Pour cela considérons un k donné et prouvons qu'il existe une suite $c_1, c_2, \ldots, c_p, \ldots$ de nombres telle que l'on ait formellement

$$F(z)=F^k(z)+\sum_{p=1}^{\infty} c_p[F^k(z)]^{pn_k+1}.$$

Or pour tout $j\geqq k$ on a, d'après le n° 11,

$$F^j(z)=F^k(z)+\sum_{p=1}^{\infty} c_{k,p}[F^k(z)]^{pn_k+1}.$$

Considérons alors le tableau à double entrée

$$\begin{array}{lllll} c_{k+1,1}, & c_{k+1,2}, & \ldots, & c_{k+1,p}, & \ldots, \\ c_{k+2,1}, & c_{k+2,2}, & \ldots, & c_{k+2,p}, & \ldots, \\ \ldots., & \ldots., & \ldots, & \ldots\ldots & \ldots. \\ \ldots., & \ldots\ldots & \ldots, & \ldots\ldots & \ldots. \end{array}$$

Dans ce tableau, les éléments de chaque colonne sont, à partir d'un certain rang qui dépend de la colonne considérée, égaux entre eux; cela provient du fait que quel que soit j, $F^j(z)$ et $F^{j+1}(z)$, ont les n_j premiers coefficients de leur développement en série entière, égaux entre eux. Donc chaque colonne du tableau forme une suite convergente. Posons $c_p=\lim\limits_{j\to\infty} c_{j,p}$.

On détermine ainsi une suite $\{c_p\}$, et de la façon dont cette suite est définie il s'ensuit que la limite formelle de $F^j(z)$, soit $F(z)$, est identique formellement à $F^k(z)+\sum\limits_{p=1}^{\infty} c_p[F^k(z)]^{pn_k+1}$, ce qui est la relation que nous voulions prouver.

14.4. *Remarques.* — 1° Il est facile de construire des suites $\{f^j(z)\}$ pour lesquelles la série $F(z)$ correspondante a un rayon de convergence positif. Il suffit de partir de $F(z)$ et de poser $f^j(z)=F_{-1}[s_jF(z)]$ avec $s_j=e^{\frac{2i\pi}{n_j}}$, $n_j<n_{j+1}$.

2° Nous allons maintenant construire une suite $\{f^j(z)\}$, ayant les propriétés indiquées, et pour laquelle la série $F(z)$ correspondante a un rayon de convergence nul.

Nous partons d'une série $F^0(z)=z+b_{0,2}z^2+\ldots+b_{0,m}z^m+\ldots$ à rayon de convergence positif et nous posons

$$f^0(z)=F^0_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{n}}F^0(z)\right],$$

n étant un entier donné supérieur à 1. Nous considérons ensuite une suite infinie de nombres $c_1, c_2, \ldots$, telle que $\lim_{q\to\infty}\sqrt[2q-1]{|c_q|}=\infty$ et nous posons

$$F^1(z)=F^0(z)+c'_1[F^0(z)]^{n+1} \quad \text{et} \quad f^1(z)=F^1_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{2n}}F^1(z)\right].$$

$$F^2(z)=F^1(z)+c'_2[F^1(z)]^{2n+1} \quad \text{et} \quad f^2(z)=F^2_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{2^2n}}F^2(z)\right].$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F^j(z)=F^{j-1}(z)+c'_j[F^{j-1}(z)]^{2^j n+1} \quad \text{et} \quad f^j(z)=F^j_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{2^j n}}F^j(z)\right],$$

et ainsi de suite, $c'_1, c'_2, \ldots, c'_j, \ldots$ étant des constantes à déterminer ultérieurement.

Montrons d'abord que quels que soient $k\leq j$ on a

$$f^k(z)=F^j_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{2^k n}}F^j(z)\right]. \tag{1}$$

Or ceci est vrai pour $j=1$. Prouvons que si c'est vrai pour $j\leq p-1$, c'est aussi vrai pour $j=p$, p étant un entier donné arbitraire. Si $k=p-1$ la relation (1) est vérifiée pour $j=p$ d'après le n° 11 puisque $F^p(z)=F^{p-1}(z)+c'_p[F^{p-1}(z)]^{2^p n+1}$. Soit donc $k<p-1$; $F^{p-1}(z)$ est par hypothèse solution de l'équation en ψ: $\psi[f^k(z)]=e^{\frac{2i\pi}{2^k n}}\psi(z)$. Il en est de même de

$$[F^{p-1}(z)]^{2^k n.2^{p-k-1}+1}=[F^{p-1}(z)]^{2^p n+1},$$

donc aussi de

$$F^p(z)=F^{p-1}(z)+[F^{p-1}(z)]^{2^p n+1}.$$

On a donc bien

$$F^p[f^k(z)]=e^{\frac{2i\pi}{2^k n}}F^p(z) \quad \text{ou} \quad f^k(z)=F^p_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{2^k n}}F^p(z)\right].$$

Montrons maintenant que la série entière $F(z)$, correspondant à la suite $\{f^j(z)\}$ que nous venons de construire, a un rayon de convergence nul (¹). $F(z)$ est la limite formelle de $F^j(z)$ quand $j \to \infty$.

Or on a vu que les $2^q n$ premiers coefficients de la série $F(z)$ sont les mêmes que ceux des séries $F^j(z)$ pour $j \geq q$. On peut donc déterminer $c'_q (q = 1, 2, \ldots)$ de façon que le coefficient de x^{2^q} dans $F(z)$ soit égal à $c_q (q = 1, 2, \ldots)$. Comme $\overline{\lim_{q \to \infty}} \sqrt[2^q]{|c_q|} = \infty$, il s'ensuit que $F(z)$ a un rayon de convergence nul.

15. *Généralisation des remarques* II *et* III *du* n° 12.

15.1. *Généralisation de l'équation de Kœnigs.* — Considérons les fonctions $f(z) = sz + a_2 z^2 + \ldots$ et $g(z) = s'z + a_2 z^2 + \ldots$ holomorphes dans un certain cercle de centre l'origine. Supposons d'abord que $s = s' \neq 0$ avec $|s| \neq 1$. On sait que pour chacune de ces fonctions il existe une fonction de Kœnigs (²). Soient $K^f(z)$ et $K^g(z)$ ces fonctions; elles sont telles qu'au voisinage de l'origine on ait

$$f(z) = K^f_{-1}[sK^f(z)], \qquad g(z) = K^g_{-1}[sK^g(z)],$$

On sait aussi qu'au voisinage de l'origine, l'équation

$$F[f(z)] = sF(z) \tag{1}$$

admet comme seules solutions holomorphes, les fonctions $cK^f(z)$, c étant une constante arbitraire. De même l'équation $F[g(z)] = sF(z)$ admet au voisinage de l'origine les solutions holomorphes $cK^g(z)$.

Nous nous proposons de chercher les solutions holomorphes au voisinage de l'origine de l'équation

$$\psi[f(z)] = g[\psi(z)]. \tag{2}$$

D'après la relation $g(z) = K^g_{-1}[sK(z)]$ l'équation (2) s'écrit

$$\psi[f(z)] = K^g_{-1}[sK^g[\psi(z)]] \qquad \text{ou} \qquad K^g[\psi[f(z)]] = sK^g[\psi(z)].$$

Donc pour que $\psi(z)$ vérifie l'équation (2) il faut et il suffit que $K^g[\psi(z)]$ soit solution de $F[f(z)] = sF(z)$. Donc à toute solution $F(z)$ de $F[f(z)] = sF(z)$ holomorphe au voisinage de l'origine, correspond une solution de même nature $\psi(z) = K^g_{-1}[F(z)]$ de l'équation (2). Les solutions holomorphes au voisinage de l'origine de l'équation (2) sont donc toutes données par

$$\psi(z) = K^g_{-1}[cK^f(z)],$$

c étant une constante arbitraire.

(¹) Pour un choix convenable des c'_j.

(²) Solution de l'équation de Kœnigs correspondante : $F[f(z)] = sF(z)$ et $F[g(z)] = sF(z)$.

15.2. *Fonctions holomorphes au voisinage de l'origine, et permutables avec $f(z)$.* — Si dans ce qui précède nous prenons $g(z)\equiv f(z)$, l'équation (2) devient

$$\psi[f(z)]=f[\psi(z)].$$

Elle nous donne alors toutes les fonctions holomorphes au voisinage de l'origine et permutables avec $f(z)$.

Ces fonctions sont donc données par $\psi(z)=\mathrm{K}^{f}_{-1}[c\mathrm{K}^{f}(z)]$. Remarquons que l'on a $\psi(0)=0$.

15.3. Revenons à l'équation (2) en supposant $s'\neq s$ avec $|s|\neq 1$, $|s'|\neq 1$, $ss'\neq 0$. Cherchons les conditions pour avoir une solution $\psi(z)$, holomorphe au voisinage de $z=0$. En remplaçant dans $\psi[f(z)]=g[\psi(z)]$, $g(z)$ par $\mathrm{K}^{g}_{-1}[s'\mathrm{K}^{g}(z)]$ elle devient

$$\psi[f(z)]=\mathrm{K}^{g}_{-1}[s'\mathrm{K}^{g}[\psi(z)]] \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{K}^{g}[\psi[f(z)]]=s'\mathrm{K}^{g}[\psi(z)].$$

Pour que cette équation ait des solutions holomorphes, il faut et il suffit que l'on ait $s'=s^{q}$ (q entier positif). Alors l'équation admet les solutions $c[\mathrm{K}^{f}(z)]^{q}$ c étant une constante arbitraire, et de là on déduit toutes les solutions holomorphes au voisinage de l'origine de $\psi[f(z)]=g[\psi(z)]$. Ces solutions sont données par $\psi(z)=\mathrm{K}^{g}_{-1}\left[c[\mathrm{K}^{f}(z)]^{q}\right]$.

15.4. Cherchons les solutions holomorphes au voisinage de l'origine de l'équation $\psi[f(z)]=g[\psi(z)]$ dans le cas où $f(z)$ et $g(z)$ sont de la forme

$$f(z)=a_p z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\ldots, \qquad g(z)=c_p z^p+c_{p+1}z^{p+1}+\ldots \qquad \text{avec} \quad p\geq 2.$$

On sait qu'à chacune de ces fonctions correspond une équation, dite équation de Boettcher, soit

$$\mathrm{F}[f(z)]=[\mathrm{F}(z)]^{p} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}[g(z)]=[\mathrm{F}(z)]^{p},$$

et une fonction de Boettcher, soit

$$\mathrm{B}^{f}(z)=a_p^{\frac{1}{p-1}}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f_n(z)}{a^{1+p+\ldots+p^{n-1}}}\right]^{p^{-n}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}^{g}(z)=c_p^{\frac{1}{p-1}}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{g_n(z)}{a^{1+p+\ldots+p^{n-1}}}\right]^{p^{-n}},$$

qui sont holomorphes et univalentes au voisinage de l'origine, s'y annulent, et vérifient respectivement les équations de Boettcher correspondantes.

On a donc

$$g(z)=\mathrm{B}^{g}_{-1}[\mathrm{B}^{g}(z)^{p}]$$

et en substituant dans l'équation $\psi[f(z)]=g[\psi(z)]$ elle devient

$$\mathrm{B}^{g}[\psi[f(z)]]=[\mathrm{B}^{g}\psi(z)]^{p}$$

où en posant

$$\mathrm{B}^{g}[\psi(z)]=\mathrm{F}(z)$$

on obtient

$$F[f(z)] = [F(z)]^p$$

qui est l'équation de Boettcher relative à $f(z)$.

Comme les solutions holomorphes au voisinage de l'origine de celle-ci sont données par $F(z) = e^{\frac{2i\pi m}{p-1}}[B^f(z)]^\lambda$, où $\lambda > 0$ et m sont des entiers arbitraires, on en déduit les solutions holomorphes $\psi(z) = B^g_{-1}[F(z)]$ de l'équation

$$\psi[f(z)] = g[\psi(z)].$$

En prenant de nouveau $f(z) \equiv g(z)$ on obtient toutes les fonctions holomorphes au voisinage de l'origine, et se permutant avec $f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots p \geq 2$ sous la forme $\psi(z) = B^f_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi m}{p-1}}[B(z)]^\lambda\right]$, m entier, λ entier positif.

16. Étant donné une fonction $f(z) = sz + a_2 z^2 + \ldots$ holomorphe au voisinage de l'origine, nous avons obtenu toutes les fonctions holomorphes au voisinage de l'origine et se permutant avec $f(z)$, dans les cas suivants : 1° quand $s \neq 0$ et $|s| \neq 1$; 2° quand $s = 0$; 3° quand $s = e^{i\theta}$ avec $\frac{\theta}{\pi}$ rationnel et $f_n(z) \equiv z$. Les cas qui restent sont les suivants : 1° $s = e^{i\theta}$ avec $\frac{\theta}{\pi}$ rationnel et où il n'existe aucun entier n tel que l'on ait $f_n(z) \equiv z$. Pour ce cas nous n'avons pu obtenir aucun résultat; 2° $s = e^{i\theta}$ avec $\frac{\theta}{\pi}$ irrationnel; c'est le cas que nous allons examiner. Il existe une série entière et une seule de la forme $F(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$ dont le rayon de convergence peut être nul ou positif, et qui vérifie formellement l'équation $F[f(z)] = sF(z)$ ou $f(z) = F_{-1}[sF(z)]$. On voit cela en substituant formellement dans l'équation $F[f(z)] = sF(z)$, $f(z)$ et $F(z)$ par leurs développements, et en écrivant les équations récurrentes qui déterminent les coefficients b_i.

D'autre part, si nous posons $g(z) = s'z + c_2 z^2 + \ldots$ où s' est donné et les c_i des coefficients à déterminer, ces coefficients sont univoquement déterminés par l'équation $f[g(z)] = g[f(z)]$, comme on le voit par substitution. Il s'ensuit que, si s' est donné, il existe une série et une seule de la forme $g(z) = s'z + c_2 z^2 + \ldots$ permutable formellement avec $f(z)$. Mais nous connaissons déjà une série de même forme que $g(z)$ et ayant les mêmes propriétés, c'est la série $F_{-1}[s'F(z)]$. On a donc $g(z) = F_{-1}[s'F(z)]$. Si $F(z)$ a un rayon de convergence positif, il en est de même de $g(z)$. Mais, si $F(z)$ a un rayon de convergence nul, alors que $f(z)$ a un rayon de convergence positif, nous n'avons obtenu aucun résultat concernant le rayon de convergence de $g(z)$.

SUR

L'EXISTENCE ET LA STABILITÉ

DES

SOLUTIONS PÉRIODIQUES

DE CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Par M. Jules HAAG.

Introduction. — Dans un travail récent (1) j'ai exposé une théorie générale de la synchronisation d'un système à n degrés de liberté, en supposant que ce système constitue un oscillateur *linéaire*, c'est-à-dire que ses mouvements autonomes sont déterminés par des équations linéaires. Cette théorie reposait sur certains théorèmes concernant les équations différentielles, que j'avais préalablement établis (2).

Or, il existe des oscillateurs *non linéaires*, c'est-à-dire dont les mouvements autonomes sont déterminés par des équations non linéaires. Parmi ces mouvements existe un mouvement périodique sinusoïdal (oscillateur *Abelé*) ou non sinusoïdal (oscillateur de *relaxation*). Je me suis proposé de reprendre la théorie générale de la synchronisation d'un système à plusieurs degrés de liberté, en m'affranchissant de l'hypothèse de la linéarité. Cela m'a nécessairement conduit à étendre les théorèmes généraux qui avaient servi de base à ma première théorie. C'est cette extension qui fait l'objet du présent Mémoire.

Je commence par étudier les systèmes différentiels *linéaires à coefficients périodiques*, d'abord sans seconds membres, puis avec seconds membres. J'utilise à cet effet ce que j'ai appelé les *décréments*, lesquels sont donnés par une équation algébrique.

(1) *Ann. Éc. Norm.*, (3), 64, p. 285 à 338.

(2) *Bull. Soc. math.*, (27), 70, p. 155 à 172; (2), 71, p. 1 à 15.

Je considère ensuite un système *non linéaire*, admettant une solution périodique connue. Je détermine les *solutions qui tendent asymptotiquement vers cette solution périodique*, ce qui me conduit aux *conditions de stabilité* de cette dernière.

J'ajoute ensuite aux seconds membres des équations précédentes des *fonctions perturbatrices* périodiques, précédées d'un facteur λ, positif et arbitrairement petit. Je démontre que si λ est assez petit, *le système perturbé admet une solution périodique*. Sa *stabilité* est déterminée par une équation algébrique d'ordre n, dont toutes les racines doivent avoir leur partie réelle négative.

Je considère ensuite un système analogue au précédent, mais dont la période autonome dépend d'un paramètre. *La période propre étant supposée assez voisine de la période des fonctions perturbatrices*, je démontre *l'existence d'un certain nombre de solutions admettant la seconde de ces périodes*.

J'examine ensuite le cas des *systèmes couplés*.

Dans le cas où l'intégrale générale du système non perturbé est périodique, on peut, par *variation des constantes*, se ramener au cas particulier étudié dans les Mémoires précités.

Dans un prochain travail, j'appliquerai ceci au problème général de la synchronisation.

1. *Système linéaire et homogène.* — Soit le système

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t)x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

où les $p_{ij}(t)$ sont des fonctions de période T, finies et continues (¹) dans l'intervalle (o, T). Dans un précédent travail (*loc. cit.*), j'ai étudié les solutions qui sont multipliées par un facteur constant S quand t augmente de T. Ce facteur S est donné par une équation algébrique de degré m. Dans le travail en question, j'ai supposé que les racines de cette équation étaient toutes distinctes. Mais, nous rencontrerons, dans ce qui va suivre, des cas de racines multiples. Nous allons donc reprendre la question dans toute sa généralité.

2. Soit $0_i^j(t)$ un système de solutions fondamentales, l'indice j caractérisant chacune de ces solutions. L'intégrale générale est

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j 0_i^j(t). \tag{2}$$

(¹) On pourrait supposer qu'il existe des discontinuités finies pour un nombre fini de valeurs exceptionnelles de t.

Cherchons une solution vérifiant l'identité

$$x_i(t+T) \equiv Sx_i(t). \tag{3}$$

Il faut et il suffit que l'on ait $x_i(T) = Sx_i(o)$, soit

$$\sum_{j=1}^{m} a_j[\theta_i^j(T) - S\theta_i^j(o)] = o. \tag{4}$$

On doit donc avoir

$$D(S) \equiv \| \theta_i^1(T) - S\theta_i^1(o)\ \theta_i^2(T) - S\theta_i^2(o) \dots \theta_i^m(T) - S\theta_i^m(o) \| = o. \tag{5}$$

Cette équation sera appelée *l'équation en* S du système (1).

3. On peut *la former directement*, sans qu'il soit nécessaire de connaître l'intégrale générale du système.

Supposons que l'on ait, pour une solution particulière, $x_i(T) = Sx_i(o)$. En intégrant (1) de o à T et posant $x_i(o) = a_i$, on obtient

$$(S-1)a_i = \sum_j \int_0^T p_{ij}(t)x_j(t)\,dt.$$

Posons

$$\int_0^t p_{ij}(t) = q_{ij}^0(t).$$

En intégrant par parties et tenant compte de (1), il vient

$$(S-1)a_i = S\left[\sum_j a_j q_{ij}^0(T)\right] - \sum_l \sum_k \int_0^T q_{ik}^0(t)p_{kj}(t)x_j(t)\,dt.$$

Posons

$$\int_0^t \left[\sum_k q_{ik}^0(t)p_{kj}(t)\right] dt = q_{ij}^1(t).$$

En répétant l'opération précédente, il vient

$$(S-1)a_i = S\sum_j a_j[q_{ij}(T) - q_{ij}^1(T)] + \sum_k \sum_j \int_0^T q_{ik}^1(t)p_{kj}(t)x_j(t)\,dt.$$

En continuant indéfiniment, on obtient

$$S-1)a_i = S\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}a_j\right), \tag{6}$$

avec

$$a_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q_{ij}^n(T). \tag{7}$$

La série du second membre est *absolument convergente*. En effet, appelons μ une limite supérieure des $|p_{ij}(t)|$. On a

$$|q_{ij}^0(t)| < \mu t, \quad |q_{ij}^1(t)| < \frac{m\mu^2 t^2}{2}, \quad \cdots, \quad |q_{ij}^n(t)| < \frac{m^n \mu^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

D'où résulte la propriété annoncée.

L'équation en S s'obtient maintenant en annulant le déterminant du système (6).

4. Revenons au système (4), où nous remplaçons S par une racine S_1 de l'équation (5). Supposons que le déterminant principal soit d'ordre $m-p$. La solution générale est de la forme $a_j = \sum_{k=1}^{p} B_j^k b_k$, les b_k désignant des constantes arbitraires et les m formes linéaires a_j étant linéairement indépendantes. En portant dans (2) et ordonnant par rapport aux b_k, on obtient

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{p} b_k y_i^k(t),$$

les k intégrales particulières $y_i^k(t)$ étant linéairement indépendantes (1). On peut donc leur faire jouer le rôle des $\theta_i^k(t)$ d'indices $k \leq p$. On a

$$y_i^j(T) = S_1 y_i^j(0) \qquad \text{pour} \quad j \leq p.$$

Le déterminant (5) admet visiblement le facteur $(S_1 - S)^p$. Ce facteur étant supprimé, il reste l'équation de degré $m-p$

$$(8) \qquad \| y_i^1(0)\ y_i^2(0) \dots y_i^p(0)\ \theta_i^{p+1}(T) - S\theta_i^{p+1}(0) \dots \theta_i^m(T) - S\theta_i^m(0) \| = 0.$$

5. *Supposons qu'elle admette encore la racine* S_1. — Pour $S = S_1$, l'identité (3) ne peut plus être vérifiée par une solution indépendante des précédentes. Cherchons alors à vérifier une identité de la forme

$$(9) \qquad x_i(t+T) = S_1 x_i(t) + \sum_{j=1}^{p} c_j y_i^j(t).$$

Nous posons

$$x_i(t) = \sum_{j=p+1}^{m} a_j \theta_i^j(t)$$

---

(1) En effet, on a $y_i^k(t) = \sum_{j=1}^{m} B_j^k \theta_i(t)$. Si $\sum_{k=1}^{p} \rho_k y_i^k(t) \equiv 0$, on a $\sum_{k=1}^{p} \rho_k B_j^k = 0$, ce qui est impossible, d'après l'indépendance des formes linéaires a_j.

et nous obtenons les équations

$$(10)\qquad \sum_{i=p+1}^{m} a_j[\theta_i^j(T)-S_1\theta_i^j(0)]-\sum_{j=1}^{p} c_j y_i^j(0)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,m).$$

C'est un système linéaire et homogène par rapport aux m inconnues a_j, c_j. Son déterminant est nul, d'après (8). Mais, il n'y a plus de solution pour laquelle les c_j seraient tous nuls (n° 4).

Prenons une solution quelconque, que nous appelons $y_i^{p+1}(t)$. Comme on peut toujours faire une substitution linéaire sur les $y_i^j(t)$ d'indice $j\leq p$, nous pouvons supposer $c_j=0$ pour $j<p$ et $c_p=1$. Nous avons ainsi

$$y_i^{p+1}(t+T)=S_1 y_i^{p+1}(t)+y_i^p(t).$$

La solution $y_i^{p+1}(t)$ peut être substituée à $\theta_i^{p+1}(t)$; moyennant quoi l'équation (8) devient, en supprimant le facteur S_1-S,

$$\|y_i^1(0)\ldots y_i^{p+1}(0)\ \theta_i^{p+2}(T)-S\theta_i^{p+2}(0)\ldots\theta_i^m(T)-S\theta_i^m(0)\|=0.$$

Si elle admet encore la racine S_1, nous répétons les opérations précédentes et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne la solution $y_i^q(t)$.

La racine S_1 *est multiple d'ordre* q et l'on a les identités

$$(11)\qquad \begin{cases} y_i^j(t+T)=S_1 y_i^j(t) & \text{pour} \quad 1\leq j\leq p; \\ y_i^j(t+T)=S_1 y_i^j(t)+y_i^{j-1}(t) & \text{pour} \quad p+1\leq j\leq q. \end{cases}$$

6. Les $\theta_i^j(t)$ d'indice $j\leq q$ sont maintenant remplacés par les $y_i^j(t)$. L'équation (5), divisée par $(S_1-S)^q$, a la forme (8), où p est remplacé par q. Elle n'admet plus la racine S_1.

Soit S_2 une de ses racines. Pour $S=S_2$, le système (4) devient

$$(S_1-S_2)\left[\sum_{j=1}^{q} a_j y_i^j(0)\right]+\sum_{j=p+1}^{q} a_j y_i^{j-1}(0)+\sum_{i=q+1}^{m} a_j[\theta_i^j(T)-S_2\theta_i^j(0)]=0.$$

Il n'admet aucune solution pour laquelle les a_j d'indice $j>q$ seraient tous nuls, car, s'il en était ainsi, les $y_i^j(0)$ d'indice $j\leq q$ ne seraient pas linéairement indépendants. Si le déterminant principal est d'ordre $m-r$, il admet r solutions linéairement indépendantes, auxquelles correspondent r solutions $y_i^j(t)$, d'indice $j=q+1,\ q+2,\ \ldots,\ q+r$, linéairement indépendantes et que nous substituons aux $\theta_i^j(t)$ de même indice j.

L'équation (5), divisée par $(S_1-S)^q(S_2-S)^r$, prend la forme (8), p étant remplacé par $q+r$. Si elle admet encore la racine S_2, nous cherchons une solution vérifiant (9), où S_1 est remplacé par S_2 et où l'indice j varie de $q+1$ à $q+r$. Nous posons

$$x_i(t)=\sum_h a_h\theta_i^h(t),$$

l'indice h prenant toutes les valeurs autres que $q+1, q+2, \ldots, q+r$. En raisonnant comme au n° 5, nous obtenons un nouveau groupe de solutions vérifiant des identités de la forme (11), S_1 étant remplacé par S_2, p par $p'=q+r$ et q par $q'\geq p'$. Et ainsi de suite.

7. En résumé, nous avons obtenu un *système fondamental* $y_i^j(t)$ *constitué par un certain nombre de groupes correspondant aux racines distinctes de l'équation en* S. *Les fonctions de chaque groupe se répartissent en deux classes. Les fonctions de la première classe vérifient l'identité*

$$y_i^j(t+T)=S_j y_i^j(t). \tag{12}$$

Les fonctions de la deuxième classe vérifient l'identité

$$y_i^j(t+T)=S_j y_i^j(t)+y_i^{j-1}(t). \tag{13}$$

Elles sont rangées dans un ordre déterminé. Nous appellerons rang r_j *d'une telle fonction son numéro d'ordre compté à partir de la fonction de plus petit indice et rang complémentaire* r_j' *la différence entre ce rang et le nombre* ω_j *des fonctions de la seconde classe*, lequel sera *appelé le nombre caractéristique du groupe.*

Le nombre total des fonctions d'un groupe égale l'ordre de multiplicité de la racine correspondante de l'équation en S.

Si le nombre caractéristique est nul, c'est-à-dire si la seconde classe n'existe pas, nous dirons que le groupe est un *groupe simple.*

Si S_j est racine simple, il n'y a qu'une fonction dans le groupe; elle est de première classe; le groupe est simple.

Les S_j seront appelés les *décréments.* Nous poserons

$$|S_j|=\sigma_j, \qquad \alpha_j=\frac{1}{T}\log\sigma_j. \tag{14}$$

Les α_j seront les *décréments logarithmiques.*

Nous poserons aussi

$$H(t)=\|y_1^1(t)\,y_2^1(t)\ldots y_m^1(t)\| \tag{15}$$

et nous supposerons $H(0)=1$. On sait que

$$H(t)=e^{\Delta(t)}, \qquad \Delta(t)=\sum_{i=1}^{m}\int_0^t p_{ii}(t)\,dt. \tag{16}$$

Nous appellerons $H_i^j(t)$ le quotient par $H(t)$ du mineur correspondant à l'élément y_i^j. Ces $H_i^j(t)$ vérifient le système différentiel

$$\frac{dH_i}{dt}=-\sum_{k=1}^{m}p_{ki}(t)H_k. \tag{17}$$

En effet, on a, pour $j = 1, 2, \ldots, m$,

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{H}_i y_i^j = 0 \text{ ou } 1.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{d\mathrm{H}_i}{dt} y_i^j + \sum_i \sum_k \mathrm{H}_i p_{ik} y_k^j = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^j \left(\frac{d\mathrm{H}_i}{dt} + \sum_k p_{ki} \mathrm{H}_k \right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Le déterminant $\| y_i^j \|$ étant $\neq 0$, on en déduit (17).

8. *Identités diverses.* — Si, dans le déterminant $\mathrm{H}(t)$, on remplace t par $t + \mathrm{T}$, chaque élément $y_i^j(t)$ est remplacé par $\mathrm{S}_j y_i^j(t)$ ou par $\mathrm{S}_j y_i^j(t) + y_i^{j-1}(t)$. On peut manifestement, sans changer $\mathrm{H}(t)$, laisser tomber successivement, en procédant de gauche à droite, les termes tels que $y_1^{j-1}(t)$. On en déduit que $\frac{\mathrm{H}(t+\mathrm{T})}{\mathrm{H}(t)}$ égale le produit des racines S_j, chacune étant répétée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. D'après (16), on conclut que *le produit des racines de l'équation en* S *vaut* $e^{\Delta \mathrm{T}}$, ce qui est d'ailleurs évident sur l'équation (5).

9. Des formules (12) et (13), on peut tirer l'expression générale de $y_i^j(t + n\mathrm{T})$, n désignant un entier quelconque. On a, pour le premier groupe par exemple,

$$(18) \qquad \begin{cases} y_i^j(t + n\mathrm{T}) = \mathrm{S}_1^n y_i^j(t), & \text{si } 1 \leq j \leq p. \\ y_i^j(t + n\mathrm{T}) = \sum_{k=0}^{j-p} \mathrm{C}_n^k \mathrm{S}_1^{n-k} y_i^{j-k}(t), & \text{si } p \leq j \leq q. \end{cases}$$

Dans la deuxième formule, C_n^k est un coefficient du binome: il doit être remplacé par zéro si $k > n$, par 1 si $k = 0$ ou n.

La première formule est évidente d'après (12). Pour démontrer la seconde, il suffit de vérifier la formule de récurrence obtenue en remplaçant t par $t + (n-1)\mathrm{T}$ dans la formule (13), ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{j-p} (\mathrm{C}_n^k - \mathrm{C}_{n-1}^k - \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}) \mathrm{S}_1^{n-k} y_i^{j-k}(t) = 0.$$

Pour $n > k$, la parenthèse est nulle, d'après une formule élémentaire bien connue. Pour $n = k$, le deuxième terme de la parenthèse est nul, les deux autres valent *un*. Pour $n < k$, les trois termes sont nuls.

10. On a l'identité

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{H}_i^j(t+n\mathrm{T})\,y_i^j(t+n\mathrm{T}) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{H}_i^j(t)\,y_i^j(t).$$

En utilisant les formules (18), on obtient, pour le premier groupe,

$$\sum_{j=1}^{p} \mathrm{H}_i^j(t-n\mathrm{T})\,\mathrm{S}_1^n\,y_i^j(t) + \sum_{j=p+1}^{q} \mathrm{H}_i^j(t+n\mathrm{T}) \left[\sum_{k=0}^{j-p} \mathrm{C}_n^k \mathrm{S}_1^{n-k}\, y_i^{j-k}(t) \right] = \sum_{j=1}^{q} \mathrm{H}_i^j(t)\,y_i^j(t).$$

Comme les H_i^j sont indépendants des y_i^j, ceci doit avoir lieu quels que soient les $y_i^j(t)$. On en déduit les formules suivantes :

$$(19) \qquad \begin{cases} \mathrm{H}_i^j(t+n\mathrm{T}) = \dfrac{\mathrm{H}_i^j(t)}{\mathrm{S}_1^n} & \text{si } 1 \leq j \leq p-1, \\ \mathrm{H}_i^j(t+n\mathrm{T}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-j} \mathrm{C}_{n+k-1}^k \frac{\mathrm{H}_i^{j+k}(t)}{\mathrm{S}_1^{n+k}} (-1)^k; & \text{si } p \leq j \leq q. \end{cases}$$

Pour les vérifier, substituons dans l'identité ci-dessus. Les termes $\sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{H}_i^j y_i^j$ disparaissent immédiatement et il reste

$$\sum_{j=p}^{q} \left[\sum_{k=0}^{q-j} \mathrm{C}_{n+k-1}^k (-1)^k \frac{\mathrm{H}_i^{j+k}}{\mathrm{S}_1^{n+k}} \right] \left[\sum_{h=0}^{j-p} \mathrm{C}_n^h \mathrm{S}_1^{n-h}\, y_i^{j-h} \right] = \sum_{r=p}^{q} \mathrm{H}_i^r\, y_i^r$$

ou

$$\sum_{j=p}^{q} \sum_{k=0}^{q-j} \sum_{h=0}^{j-p} \mathrm{C}_{n+k-1}^k \mathrm{C}_n^h (-1)^k \mathrm{S}_1^{-h-k} \mathrm{H}_i^{j+k}\, y_i^{j-h} = \sum_{r=p}^{q} \mathrm{H}_i^r\, y_i^r.$$

Posons, au premier membre, $j+k=s$ et $j-h=r$; il vient

$$\sum_{j=p}^{q} \sum_{s=j}^{q} \sum_{r=p}^{j} \mathrm{C}_{n+s-j-1}^{s-j} \mathrm{C}_n^{j-r} (-1)^{s-j} \mathrm{S}_1^{-s} \mathrm{H}_i^s\, y_i^r = \sum_{r=p}^{q} \mathrm{H}_i^r\, y_i^r.$$

Si $s > r$, le coefficient de $\mathrm{H}_i^s y_i^r$ doit être nul, soit, en remarquant que $p \leq r \leq j \leq s \leq q \leq$,

$$\sum_{j=r} \mathrm{C}_{n+s-j-1}^{s-j} \mathrm{C}_n^{j-r} (-1)^{s-j} = 0.$$

Pour $s = r$, on doit avoir

$$\sum_{j=r}^{r} \mathrm{C}_{n+r-j-1}^{r-j} \mathrm{C}_n^{j-r} (-1)^{r-j} = 1.$$

Dans cette dernière formule, on a nécessairement $j=r$ et la vérification est évidente. La première s'écrit, en posant $s-r=u>0$,

$$\sum_{k=0}^{u} C_{n+k-1}^{k} C_{n}^{u-k}(-1)^{k}=0.$$

On la vérifie en annulant le coefficient de x^u dans le produit des deux développements

$$(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k}(-1)^{k}x^{k}, \qquad (1-x)^{n}=\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{n-k}x^{n-k}.$$

11. Posons $t=nT+\theta$, $0\leq\theta<T$. Les formules (18) et (19) nous montrent que, pour t infiniment grand, on a *asymptotiquement*, avec la notation (14),

$$(20)\qquad \begin{cases} |y_i^j(t)|=\dfrac{e^{\alpha_j t}t^{r_j}}{T^{r_j}(r_j)!}\,|y_i^{j-r_j}(0)|\,e^{-(\theta+r_jT)\alpha_j}\leq M e^{\alpha_j t}t^{r_j}, \\ |H_i^j(t)|=\dfrac{e^{-\alpha_j t}t^{r'_j}}{T^{r'_j}(r'_j)!}\,|H_i^{j+r'_j}(0)|\,e^{(\theta-r'_jT)\alpha_j}\leq M' e^{-\alpha_j t}t^{r'_j}. \end{cases}$$

Dans ces formules, r_j et r'_j doivent être remplacés par zéro, si $r_j<0$; M et M' ont une signification évidente.

12. *Système linéaire non homogène.* — Considérons le système

$$(21)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t)x_j+f_i(t), \qquad (i=1,2,\ldots,m),$$

où les f_i sont des fonctions continues. Son intégrale générale est

$$(22)\qquad x_i(t)=\sum_{j=1}^{m} y_i^j(t)Y_j(t),$$

avec

$$(23)\qquad Y_j(t)=a_j+A_j(t,f)$$

et

$$(24)\qquad A_j(t,f)=\sum_{k=1}^{m}\int_0^t H_k^j(t)f_k(t)\,dt.$$

De (22) on déduit

$$(25)\qquad Y_j(t)=\sum_{i=1}^{m} H_i^j(t)x_i(t).$$

13. *Conditions d'existence d'une solution périodique.* — Si les $x_i(t)$ admettent la période T, les équations (21) montrent que *les $f_i(t)$ admettent aussi cette période.*

Réciproquement, si les $f_i(t)$ admettent la période T, pour que la solution (22) admette aussi cette période, il faut et il suffit que l'on ait $x_i(T) = x_i(0)$ ou, d'après (22), (23) et (11),

$$\sum_{j=1}^{p-1} [a_j(S_1 - 1) + S_1 A_j(T)]\, y_i^j(0) + \sum_{j=p}^{q-1} [a_j(S_1 - 1) + S_1 A_j(T) + a_{j+1} + A_{j+1}(T)]\, y_i^j(0) + [a_q(S_1 - 1) + S_1 A_q(T)]\, y_i^q(0) + \ldots = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ces équations constituent un système linéaire et homogène par rapport aux crochets. Le déterminant est $H(0) = 1$; donc, tous les crochets doivent être nuls. D'où l'on tire, en supposant $S_1 \neq 1$,

$$(26) \quad \begin{cases} a_j = \dfrac{S_1}{1 - S_1} A_j(T) & \text{pour } 1 \leq j \leq p-1 \text{ et } j = q, \\ a_j = \dfrac{S_1 A_j(T) + a_{j+1} + A_{j+1}(T)}{1 - S_1} & \text{pour } p \leq j \leq q-1 \end{cases}$$

et les formules analogues dans tous les groupes.

On en conclut que *si aucun décrément n'est égal à* un, *il y a une solution périodique et une seule*.

Si $S_1 = 1$, il faut, pour le premier groupe,

$$(27) \qquad A_j(T) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq p-1 \text{ et } j = q,$$

$$(28) \qquad a_j = -A_j(T) - A_{j-1}(T) \quad \text{pour } p+1 \leq j \leq q.$$

Les $f_i(t)$ doivent vérifier les p conditions (27) *et l'on a alors une infinité de solutions périodiques, dépendant des p constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_p$*

$$(29) \qquad x_i = \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha y_i^\alpha(t) + B_i(t, f).$$

Les $B_i(t, f)$ sont des *fonctions déterminées*, résultant de ce qui précède. Observons que les f_k interviennent linéairement dans ces fonctions; on a donc

$$(30) \qquad B_i(t, f) - B_i(t, f') = B_i(t, f - f').$$

De plus, si $|f_k| < \overline{f}$ quel que soit k, on a

$$(31) \qquad |B_i(t, f)| < A\overline{f},$$

A désignant une constante positive déterminée, égale, à un facteur constant près, au maximum des $|y_j^i(t) H_i^j(t)|$ pour $0 \leq t \leq T$.

14. *Solutions tendant vers zéro pour $t = +\infty$.* — Supposons que l'on ait, quels que soient k et $t > 0$,

$$(32) \qquad |f_k(t)| < C e^{-\beta t},$$

où C désigne une constante positive et $\beta = h\alpha$, $0 < h < \frac{1}{2}$, α désignant *le plus grand des α_j négatifs*.

Convenons de numéroter les solutions fondamentales $\gamma_i^j(t)$ de telle manière que l'on ait

$$\alpha_j < 0 \quad \text{pour } j \leq p, \qquad \alpha_j \geq 0 \quad \text{pour } j > p. \tag{33}$$

D'après (20), on a, pour $j \leq p$,

$$|A_j(t)| < mM'C \int_0^t e^{(2\beta-\alpha_j)t} t^{r_j} dt. \tag{34}$$

Si $j > p$, l'intégrale $A_j(+\infty)$ a un sens et l'on a

$$|A_j(+\infty) - A_j(t)| < mM'C \int_t^{+\infty} e^{(2\beta-\alpha_j)t} t^{r_j} dt. \tag{35}$$

15. Cela posé, choisissons arbitrairement les p constantes $b_1, b_2, \ldots, b_p$, de module $< \rho$. Puis, prenons

$$a_j = b_j \quad \text{si } j \leq p, \qquad a_j = -A_j(+\infty) \quad \text{si } j > p. \tag{36}$$

Des formules (22), (23) et des inégalités (34), (35), on déduit

$$|x_i(t)|\, e^{-\beta t} < M\rho \left[\sum_{j=1}^{p} e^{(\alpha_j-\beta)t} t^{r_j} \right] + mMM'C \left[\sum_{j=1}^{p} X_j - \sum_{i=p+1}^{m} X_j' \right], \tag{37}$$

en posant

$$\begin{cases} X_j = e^{(\alpha_j-\beta)t} t^{r_j} \displaystyle\int_0^t e^{(2\beta-\alpha_j)t} t^{r_j} dt & \text{pour } j \leq p, \\ X_j' = e^{(\alpha_j-\beta)t} t^{r_j} \displaystyle\int_t^{+\infty} e^{(2\beta-\alpha_j)t} t^{r_j} dt & \text{pour } j > p. \end{cases} \tag{38}$$

Pour $j \leq p$, on a $\alpha_j - \beta \leq \alpha(1-h) < 0$. Le maximum de $e^{(\alpha_j-\beta)t} t^{r_j}$, pour $0 < t < +\infty$, est

$$M_j = \frac{e^{-r_j} r_j^{r_j}}{(\beta - \alpha_j)^{r_j}}. \tag{39}$$

Posons ensuite

$$N_j = \text{max de } X_j, \qquad N_j' = \text{max de } X_j'. \tag{40}$$

Ces maxima sont *finis*. En effet, pour $j \leq p$, on a

$$2\beta - \alpha_j \geq \alpha(2h-1) > 0.$$

Pour $t = +\infty$, la valeur asymptotique de X_j est $\frac{e^{\beta t} t^{\omega_j}}{2\beta - \alpha_j}$, dont la limite est zéro. Pour $j > p$, on a $2\beta - \alpha_j < 0$; la valeur asymptotique de X_j' est $\frac{e^{\beta t} t^{\omega_j}}{\alpha_j - 2\beta}$, dont la limite est encore zéro.

Il résulte de tout ceci que l'on a, quel que soit $t > 0$,

$$|x_i(t)| < (\rho P + CP')e^{\beta t}, \tag{41}$$

avec

$$P = M\left(\sum_{j=1}^{p} M_j\right), \qquad P' = mMM'\left(\sum_{j=1}^{p} N_j + \sum_{j=p+1}^{m} N'_j\right). \tag{42}$$

On en conclut que *la solution considérée tend vers zéro pour* $t = +\infty$. Elle dépend des p constantes arbitraires b_j. Nous la désignerons par la notation $x_i(t) = \Phi_i(f, b)$. On a évidemment

$$\Phi_i(f, b) - \Phi_i(g, b) = \Phi_i(f - g, 0). \tag{43}$$

16. Les constantes M_j, N_j, N'_j dépendent uniquement des nombres entiers r_j, r'_j, des décréments logarithmiques α_j et du choix de la constante h. Si tous les décréments sont éloignés de *un*, ces constantes ont évidemment une valeur finie. Mais, nous rencontrerons plus loin le *cas où* certains décréments ont un module < 1 et infiniment voisin de *un*. Examinons l'ordre de grandeur de P et de P' dans cette hypothèse.

Posons $\alpha = -\lambda$, λ étant infiniment voisin de $+0$. Si σ_j est infiniment voisin de *un* et si $j \leq p$, on a

$$\alpha_j = -k\lambda, \qquad k \geq 1.$$

La formule (39) montre immédiatement que $M_j = O(\lambda^{-r_j})$. Comme $r_j \leq \omega_j$, il s'ensuit que *si* ω *désigne le plus grand des* ω_j *correspondant à des décréments ayant un module* < 1 *et en différant par* $O(\lambda)$, *on a*

$$P = O(\lambda^{-\omega}). \tag{44}$$

Cherchons l'ordre de grandeur de N_j, dans la même hypothèse que ci-dessus. Posons

$$(2\beta - \alpha_j)t = (k - 2h)\lambda t = x \qquad \text{et} \qquad \frac{k-h}{k-2h} = n.$$

On a

$$N_j = [(k-2h)\lambda]^{-\omega_j - 1} \times e^{-nx} x^{r'_j} \int_0^x e^{x} x^{r'_j} dx.$$

Le rapport n étant > 1, la fonction de x constituée par le second facteur tend vers zéro pour $x = +\infty$. Elle admet donc un maximum fini et l'on a

$$N_j = O(\lambda^{-\omega_j - 1}).$$

Supposons maintenant $\alpha_j = k\lambda$ et posons

$$(\alpha_j - 2\beta)t = (k - 2h)\lambda t = x \qquad \text{et} \qquad \frac{k-h}{k-2h} = n.$$

On a

$$X'_j = [(k+2h)\lambda]^{-\omega_j-1} \times e^{nx} x^{r_j} \int_x^{-x} e^{-x} x^{r_j} dx.$$

Le rapport n étant < 1, la fonction de x constituée par le second facteur tend vers zéro pour $x = +\infty$. Elle admet donc un maximum fini et l'on a

$$N'_j = O(\lambda^{-\omega_j-1}).$$

Il résulte de cette discussion que *si l'on appelle* ω' *le plus grand des* ω_j *correspondant à des décréments ayant un module* ≥ 1 *et en différant par* $o(\lambda)$, *on a*

$$P' = O(\lambda^{-\omega'-1}). \tag{45}$$

Dans le cas où les groupes correspondant à des décréments ayant un module différant de un *par* $o(\lambda)$ *sont tous des groupes simples, on a*

$$P = O(1), \qquad P' = O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{46}$$

17. *Système non linéaire.* — Considérons le système

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(z, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{47}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

1° Les fonctions f_i admettent la période T par rapport à t.

2° Le système admet une solution $Z_i(t)$ de période T.

3° Dans le *domaine* (D) défini par

$$|z_i - Z_i(t)| < R, \tag{48}$$

et quel que soit t, les f_i, considérés comme fonctions des z_j, sont continus et admettent des dérivées premières et secondes continues $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial z_j}$, $f_{ijk} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial z_j \partial z_k}$. Toutes ces fonctions et dérivées sont également continues par rapport à t.

Nous appellerons $p_{ij}(t)$ et $p_{ijk}(t)$ les fonctions périodiques obtenues en remplaçant les z par les $Z(t)$ dans f_{ij} et f_{ijk}. Le système (1) sera dit *système linéaire associé* au système (47).

Pour faciliter le langage, nous ferons jouer à t le rôle du temps et nous considérerons les z_i comme les coordonnées cartésiennes d'un point (z) de l'espace à m dimensions. La courbe décrite par ce point quand les z_i vérifient (47) et que t croît de o à $+\infty$ sera dite une *trajectoire du système* (47).

Appelons (z_0) la position de (z) pour $t = o$ et domaine (D_0) le domaine défini par

$$|z_i(o) - Z_i(o)| < R_0. \tag{49}$$

Nous dirons que la solution (Z) est *stable* si l'on peut choisir R_0 assez petit pour que, *quelle que soit la position de* (z_0) *dans* (D_0), les différences $z_i(t) - Z_i(t)$ vérifient (48) quel que soit $t > 0$ et tendent vers zéro pour $t = +\infty$.

18. Posons

$$z_i = Z_i(t) + x_i, \qquad F_i(x, t) = f_i(Z + x, t) - f_i(Z, t) - \sum p_{ij}(t)\, x_j. \tag{50}$$

Les équations (47) s'écrivent

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum p_{ij}(t)\, x_j + F_i(x, t). \tag{51}$$

Si les points (z) et (z') appartiennent au domaine (D), on a, en vertu des hypothèses faites au n° 17,

$$F_i(x, t) < KR^2, \qquad F_i(x, t) - F_i(x', t) < K'R\left[\sum_j |x_j - x'_j|\right], \tag{52}$$

K et K' désignant des constantes positives proportionnelles au maximum des modules des dérivées secondes f_{ijk} dans le domaine (D).

19. *Solutions tendant vers la solution périodique pour* $t = +\infty$. — Adoptons, pour le système associé, les notations du n° 14, de sorte que p désignera *le nombre des décréments ayant un module* < 1, chacun d'eux étant répété un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Choisissons arbitrairement les constantes $b_1, b_2, \ldots, b_p$, de module $< \rho$. Nous allons leur faire correspondre une solution du système (47) par la méthode des *approximations successives*.

Soit $x_i^n(t)$ la $n^{\text{ième}}$ approximation. Posons $F_i(x^n, t) = F_i^n(t)$. Nous déterminons nos approximations successives par les formules

$$x_i^n(t) = \Phi_i(F^{n-1}, b), \qquad x_i^0 = \Phi_i(0, b) \tag{53}$$

avec la notation du n° 15.

20. Nous allons démontrer que l'on a, quel que soit n,

$$|x_i^n(t)| < \rho B_n e^{\beta t}, \qquad \rho B_n < R, \tag{54}$$

les B_n désignant des constantes positives provisoirement indéterminées et β le nombre introduit au n° 14.

D'après (41), on peut prendre $B_0 = P$.

Admettons maintenant l'inégalité (54) au rang $n - 1$. D'après (52), on a

$$F_i^{n-1}(t) < K\rho^2 B_{n-1}^2 e^{2\beta t}.$$

Cette inégalité est de la forme (32), avec $C = K\rho^2 B_{n-1}^2$. On a donc, d'après (41),

$$|x_i^n(t)| < (\rho P + P' K \rho^2 B_{n-1}^2)\, e^{\beta t},$$

et l'on peut prendre

$$B_n = P + Q\rho B_{n-1}^2, \qquad Q = P'K. \tag{55}$$

Si B_n tend vers une limite B, pour $n = +\infty$, cette limite est donnée par l'équation du second degré

$$\varphi(B) \equiv Q\rho B^2 - B + P = 0, \tag{56}$$

laquelle a des racines si

$$\rho < \frac{1}{4PQ}. \tag{57}$$

Je dis que $B_n > B_{n-1}$. Ceci revient à $\varphi(B_{n-1}) > 0$. Cette condition est manifestement remplie pour $n = 1$. Admettons $B_n > B_{n-1}$ et démontrons $B_{n+1} > B_n$, soit, d'après (55),

$$P + Q\rho B_n^2 > P + Q\rho B_{n-1}^2,$$

ce qui résulte de $B_n > B_{n-1}$.

Ceci nous apprend du même coup que B_n est extérieur aux racines de (56).

Je dis que B_n est inférieur à la plus petite racine. Il suffit de démontrer que $B_n < \frac{1}{2Q\rho}$. Pour $n = 0$, ceci revient à $\rho < \frac{1}{2PQ}$, conséquence de (57). Admettons la propriété pour B_n. On a

$$B_{n+1} = P + Q\rho B_n^2 < P + \frac{Q\rho}{4Q^2\rho^2} = P + \frac{1}{4Q\rho} < \frac{1}{2Q\rho},$$

d'après (57). Donc, la propriété est vérifiée pour B_{n+1}.

Il résulte de ce raisonnement que B_n *tend, en croissant, vers la plus petite racine* B *de l'équation* (56). On en conclut que l'on, a quel que soit n,

$$|x_i^n(t)| < \rho B e^{\beta t}. \tag{58}$$

Reste à vérifier $\rho B < R$. Pour cela, il suffit que $\varphi\left(\frac{R}{\rho}\right) < 0$, soit

$$\rho < \frac{R(1 - QR)}{P}, \tag{59}$$

ce qui exige

$$R < \frac{1}{Q}. \tag{60}$$

Si cette dernière condition n'est pas remplie, $\frac{R}{\rho}$ est $> \frac{1}{\rho Q}$, c'est-à-dire plus grand que la somme des racines de l'équation (56), donc *a fortiori* plus grand que la plus petite racine B.

21. Occupons-nous maintenant de la *convergence des approximations*. Posons

$$u_i^n(t) = x_i^n(t) - x_i^{n-1}(t),$$

et admettons que l'on ait, quel que soit t,

$$|u_i''(t)| < U_n e^{\beta' t}, \tag{61}$$

U_n désignant une constante positive. D'après l'identité (43), on a

$$u_i^{n+1} = \Phi_i(F^n - F^{n-1}, o).$$

Or, la deuxième inégalité (52) nous donne, en tenant compte de (58) et (61),

$$|F_k^n(t) - F_k^{n-1}(t)| < mK'B\rho U_n e^{2\beta' t}.$$

Cette inégalité est de la forme (32), avec $C = mK'B\rho U_n$. On a donc, d'après (41),

$$|u_i^{n+1}(t)| < mP'K'B\rho U_n e^{3\beta' t},$$

et l'on peut prendre

$$U_{n+1} = mP'K'B\rho U_n.$$

Les séries $u_i''(t)$ sont absolument et uniformément convergentes si $B < \frac{1}{mP'K'\rho}$. Il suffit pour cela que $\varphi\left(\frac{1}{mP'K'\rho}\right)$ soit $< o$, ce qui exige

$$\rho < \frac{mP'K' - Q}{P m^2 P'^2 K'^2}, \tag{62}$$

sous réserve que

$$Q < mP'K'. \tag{63}$$

Si cette dernière inégalité n'est pas vérifiée, $\frac{1}{mP'K'\rho}$ est $> \frac{1}{Q\rho}$, c'est-à-dire que la somme des racines de (56), donc *a fortiori* plus grand que la plus petite racine B.

22. En définitive, *si* ρ *est assez petit* pour que les inégalités (57) et éventuellement (59) et (62) soient toutes vérifiées, les fonctions $x_i''(t)$ tendent uniformément, pour $n = \infty$, vers des fonctions déterminées $x_i(t)$. Ces fonctions vérifient le système (51). En effet, la différence $F_i(x, t) - F_i(x'', t)$ tend uniformément vers zéro, d'après la deuxième inégalité (52). Donc, la dérivée $\frac{dx_i''}{dt}$ tend uniformément vers $\sum_i p_{ij}(t)x_j + F_i(x, t)$. Il en résulte que cette limite est la dérivée $\frac{dx_i}{dt}$. Donc, l'équation (51) est vérifiée.

Nous avons formé une solution du système (51) qui, d'après (58), tend vers zéro pour $t = +\infty$. En remontant aux z_i par les formules (50), nous obtenons une *solution du système* (47) *qui tend vers la solution périodique* (Z) *pour* $t = +\infty$, *quelles que soient les p constantes arbitraires* b_i, *pourvu qu'elles soient assez petites*.

Pour ces solutions, on a $a_j = b_j$ si $j \leq p$; si $j > p$, a_j est la limite de $-A_j(F^n)$ pour $n = \infty$; c'est une fonction déterminée des b_j. La position initale du point

(z) étant donnée, d'après (22), par les formules

$$z_i(0) = Z_i(0) + \sum_{j=1}^{p} b_j y_i^j(0) + \sum_{j=p+1}^{m} a_j y_i^j(0),$$

on voit que l'ensemble (D_0') de ces points constitue une *multiplicité à p dimensions*, que nous appellerons *domaine restreint de stabilité*. La question se pose de savoir s'il existe d'autres solutions que les précédentes tendant vers la solution périodique pour $t = +\infty$. Cela est probablement impossible; mais je n'ai pu en donner une démonstration rigoureuse.

23. *Condition de stabilité.* — Pour que la solution (Z) soit stable, il faut et il suffit que le domaine (D_0') soit un domaine (D_0) à m dimensions, c'est-à-dire que l'on ait $p = m$. Donc,

THÉORÈME. — *La condition suffisante et probablement nécessaire de stabilité est que tous les décréments aient un module* < 1.

Le domaine (D_0) est un domaine *linéaire*, dont chaque point est à coup sûr le point de départ d'une trajectoire tendant vers la trajectoire périodique. Mais, le *véritable* domaine de stabilité (Δ_0) est plus étendu. Il comprend certainement (D_0); mais, nous ne connaissons pas sa frontière exacte.

Dans le cas particulier où le module maximum des décréments est de la forme $1 - \lambda$, λ étant infiniment petit positif, on a $-\alpha = O(\lambda)$; les constantes P' et Q sont infiniment grandes. D'après (57), ρ est infiniment petit. Donc, *si le module maximum des décréments de module* < 1 *est infiniment voisin de* un, *le domaine restreint de stabilité* (D_0') *est infiniment petit dans toutes ses dimensions.*

Faisant toujours l'hypothèse précédente, supposons que *les groupes correspondant aux décréments de module infiniment voisin de un soient tous des groupes simples*. D'après (46), la constante P est finie et $P' = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Supposons maintenant *que les fonctions* f_i du n° 17 *soient multipliées par* λ; de sorte que les constantes K et K' de (52) valent $O(\lambda)$. La constante Q du n° 20 est finie, donc aussi les seconds membres de (57), (59) et (60). Il en est de même de P'K', donc du second membre de (62). On en conclut que, dans ce cas, *le domaine de stabilité reste fini quand* λ *tend vers zéro.*

24. *Cas où il existe une infinité de solutions périodiques.* — Supposons que le système (47) admette une infinité de solutions périodiques $Z_i(t, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ dépendant des paramètres μ_h, en nombre $n \leq m$. Nous supposons que les fonctions Z_i sont *indépendantes*, c'est-à-dire que n quelconques d'entre elles ne sont liées par aucune relation indépendante des μ_i et vérifiée quel que soit t. Ceci revient à dire qu'*aucun des jacobiens formés avec les* $\frac{\partial Z_i}{\partial \mu_h}$ *n'est identiquement nul.*

On a

$$\frac{\partial Z_i}{\partial t} = f_i(Z, t).$$

Dérivons par rapport à μ_h :

$$\frac{\partial^2 Z_i}{\partial \mu_h \partial t} = \sum_{j=1}^{m} f_{ij}(Z, t) \frac{\partial Z_j}{\partial \mu_h}.$$

Ceci exprime que les fonctions $\frac{\partial Z_i}{\partial \mu_h}$ vérifient le système linéaire associé. Celui-ci admet donc n solutions périodiques. Ces solutions sont linéairement indépendantes, sauf peut-être pour certaines valeurs exceptionnelles des μ_h. En effet, si elles ne l'étaient pas, tous les jacobiens ci-dessus mentionnés seraient identiquement nuls, contrairement à l'hypothèse.

On en conclut (n° 7) que *l'équation en* S *admet la racine* $S = 1$ comme *racine multiple d'ordre n* au moins.

Donnons aux μ_h des valeurs numériques déterminées et supposons que, pour ces valeurs, le nombre des $\sigma_i < 1$ soit p. Comme il y a au moins n décréments égaux à *un*, on a nécessairement $p \leq m - n$. Vous savons (n° 22) qu'il existe un domaine restreint de stabilité (D'_0) à p dimensions, tel que toute solution issue d'un point de ce domaine tende, pour $t = +\infty$, vers la solution périodique envisagée.

Faisons maintenant varier arbitrairement les μ_h à l'intérieur des limites pour lesquelles les hypothèses précédentes sont valables. Le domaines (D'_0) engendre alors un domaine (D_0) à $n + p$ dimensions. Par tout point M_0 de ce domaine passe un domaine (D'_0) et un seul (1), auquel correspondent des valeurs déterminées des μ_h et par conséquent une solution périodique déterminée (Z) du système (47). Soit P_0 la position du point (Z) pour $t = 0$. Si l'on fait partir, au temps zéro, M de M_0 et P de P_0, la distance MP tend vers zéro pour $t = +\infty$. Par conséquent, *la solution issue de tout point de* (D_0) *tend vers une solution périodique*.

Pour que (D_0) soit un domaine à m dimensions, il faut et il suffit que l'on ait $p = m - n$. Nous dirons alors que *le faisceau des solutions périodiques est stable et que* (D_0) *est son domaine de stabilité*. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante de stabilité est que le décrément* $S = 1$ *soit racine multiple d'ordre n de l'équation en* S *et que les autres décréments aient un module* < 1.

25. *Cas où les fonctions* f_i *sont indépendantes de t.* — Dans ce cas, s'il existe une solution périodique $Z_i(t)$, il en existe une infinité $Z_i(t + \mu)$, μ désignant une constante arbitraire. Quand on fait varier μ, la trajectoire fermée correspon-

(1) Si le champ de variation des μ_h est assez restreint.

dante reste fixe; mais le point de départ P_0, de coordonnées $Z_i(\mu)$, varie sur cette trajectoire.

On se trouve dans un cas particulier du cas examiné au n° 24, la solution périodique du système associé étant $Z_i'(t+\mu)$. *Pour que la trajectoire soit stable, il faut et il suffit que les* $m-1$ *décréments autres que* un *aient un module* <1.

26. *Introduction des fonctions perturbatrices.* — Considérons maintenant le système

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(z, t) + \lambda g_i(z, t). \tag{64}$$

Les fonctions f_i sont les mêmes qu'au n° 17 et seront appelées *fonctions principales*. Le facteur λ est un facteur positif *arbitrairement petit*. Les fonctions g_i seront appelées les *fonctions perturbatrices*. Le système obtenu pour $\lambda = 0$ sera appelé le *système principal*. Nous supposons, comme au n° 24, qu'il admet une *solution périodique principale* $Z(t, \mu)$, dépendant des n paramètres μ_α. Nous admettons que cette solution est stable (1). Il s'ensuit (n° 24) que la racine $S=1$ est racine multiple d'ordre n de l'équation en S et que les autres décréments ont un module <1. Les solutions fondamentales du système associé étant toujours désignées par la notation $y_i^j(t)$, convenons que $y_i^\alpha(t) = \frac{\partial Z_i}{\partial \mu_\alpha}$ pour $1 \leq \alpha \leq n$. Nous appellerons Y une limite supérieure des $|y_i^j(t)|$ pour $0 \leq t \leq T$.

Rappelons (n° 13) que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système linéaire avec seconds membres ait une solution périodique sont $A_j(T, f) = 0$ pour $j \leq n$. Si elles sont remplies, la solution périodique la plus générale est

$$x_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha y_i^\alpha(t) + B_i(t, f), \tag{65}$$

les c_α désignant des constantes arbitraires.

Nous appellerons toujours domaine (D) le domaine défini par (48), lorsque les μ_α sont assujettis à rester eux-mêmes dans un certain domaine.

Nous supposerons que les f_i admettent, dans (D), des dérivées partielles continues jusqu'au troisième ordre inclus et nous appellerons M_p une limite supérieure des modules des dérivées d'ordre p. De même, nous supposerons que les g_i admettent, dans (D), des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre inclus et nous appellerons N_p une limite supérieure des modules des dérivées d'ordre p.

Toutes ces conventions étant admises, nous nous proposons de *chercher les solutions périodiques du système* (64) *voisines des solutions périodiques princi-*

(1) Cette condition n'est pas indispensable pour l'existence de la solution périodique. Mais elle l'est pour sa stabilité.

pales $Z(t, \mu)$ *et d'en reconnaître la stabilité.* Nous pourrons donc, dans ce qui va suivre, *supposer* $o \leq t \leq T$.

27. *Recherche des solutions périodiques.* — Posons

$$z_i = Z_i(t, \mu) + \lambda x_i. \tag{66}$$

L'équation (64) devient

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_j p_{ij}(t)\, x_j + g_i(Z, t) + \lambda F_i(x, t, \lambda) \tag{67}$$

avec

$$F_i = G_i(x, t) + \lambda J_i(x, t, \lambda), \tag{68}$$

$$G_i(x, t) = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k p_{ijk}(t)\, x_j x_k + \sum_j q_{ij}(t)\, x_j, \tag{69}$$

$$J_i = \frac{1}{\lambda^3}\left[f_i(Z + \lambda x, t) - f_i(Z, t) - \lambda \sum_j p_{ij} x_j - \frac{\lambda^2}{2} \sum_j \sum_k p_{ijk} x_j x_k \right] + \frac{1}{\lambda^2}\left[g_i(Z + \lambda x, t) - g_i(Z, t) - \lambda \sum_j q_{ij} x_j \right]. \tag{70}$$

Les p_{ijk} et q_{ij} désignent les résultats de la substitution des Z aux z dans les dérivées partielles f_{ijk} et g_{ij}.

Imposons aux x_i de vérifier les conditions $|x_i| < R'$, le nombre positif R' devant être précisé ultérieurement. Les conditions (48) s'écrivent alors

$$\lambda R' < R. \tag{71}$$

De (69) on déduit

$$|G_i| < m R' \left(\frac{m R'}{2} M_2 + N_1 \right), \qquad \left| \frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right| < m R' M_2 + N_1. \tag{72}$$

De (70) on déduit

$$J_i = \frac{1}{6} \sum_j \sum_k \sum_h f_{ijkh}(Z + \lambda 0 x, t) x_h + \frac{1}{2} \sum_j \sum_h g_{ijh}(Z + \lambda 0' x, t) x_h,$$

0 et 0' étant compris entre zéro et *un*. D'où

$$|J_i| < m R' (M_3 + N_2). \tag{73}$$

Puis

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\lambda^2}\left[f_{ij}(Z + \lambda x, t) - p_{ij} - \lambda \sum_k p_{ijk} x_k \right] + \frac{1}{\lambda}\left[g_{ij}(Z + \lambda x, t) - q_{ij} \right]$$
$$= \frac{1}{2} \sum_k \sum_h f_{ijkh}(Z + \lambda 0 x, t) x_h + \sum_h g_{ijh}(Z + \lambda 0' x, t) x_h.$$

D'où

$$\left| \frac{\partial J_i}{\partial x_j} \right| < m R' (M_3 + N_2). \tag{74}$$

28. *Pour que les z soient périodiques*, il faut et il suffit que les x le soient, c'est-à-dire que l'on ait, pour $i=1, 2, \ldots, n$,

$$A_i[T, g(Z, t)] + \lambda A_i(T, F) = 0.$$

Si λ tend vers zéro, on a, à la limite,

$$A_i[T, g(Z, t)] = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{75}$$

Moyennant quoi l'équation ci-dessus devient

$$A_i(T, F) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{76}$$

Les équations (75) contiennent les paramètres μ_α, car il en est ainsi des p_{ij} et des Z. Nous les appellerons les *équations en* μ et nous supposons qu'elles admettent une solution, que nous substituons aux μ_α, restés jusqu'à présent indéterminés.

29. Nous allons maintenant *construire une solution périodique* du système (67), en appliquant la méthode des *approximations successives*.

La $p^{\text{ième}}$ approximation $x_i^p(t)$ sera définie par la condition d'être périodique et de vérifier les équations (67) quand on y remplace les F_i par

$$F_i^{p-1}(t, \lambda) = F_i(x^{p-1}, t, \lambda) = G_i^{p-1} + \lambda J_i^{p-1}.$$

De plus, nous prenons $x_i^0(t) = 0$.

Supposons que les $x_i^{p-1}(t)$ vérifient (76). Les $x_i^p(t)$ sont donnés par (65), soit

$$x_i^p(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^p y_i^\alpha(t) + \varphi_i(t) + \lambda \theta_i^p(t), \tag{77}$$

en posant

$$\varphi_i(t) = B_i[t, g(Z, t)], \tag{78}$$

$$\theta_i^p(t) = B_i(t, F^{p-1}) = B_i(t, G^{p-1}) + \lambda B_i(t, J^{p-1}). \tag{79}$$

On a

$$|\varphi_i| < AN_3, \qquad |\theta_i^p| < A\,m\,R'\left[\frac{m\,R'}{2} M_2 + N_1 + \lambda(M_3 + N_2)\right] = \Theta. \tag{80}$$

Nous déterminons les n constantes c_α^p par les conditions

$$A_i(T, F^p) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{81}$$

qui sont nécessaires pour que les $x_i^{p+1}(t)$ puissent être périodiques.

30. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\xi_i^p = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^p y_i^\alpha(t) + \varphi_i(t), \tag{82}$$

de sorte que $x_i^p = \xi_i^p + \lambda\theta_i^p$. On peut écrire

$$G_i^p = G_i(\xi^p, t) + \lambda P_i(\xi^p, \theta^p),$$

avec

$$P_i = \frac{1}{2}\sum_j\sum_k p_{ijk}(\xi_j\theta_k + \xi_k\theta_j + \lambda\theta_j\theta_k) + \sum_j q_{ij}\theta_j. \tag{83}$$

L'équation (76) devient

$$A_i[T, G(\xi^p, t)] = -\lambda A_i(T, P^p + J^p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{84}$$

A première vue, le premier membre semble être un polynome du second degré en c_α^p. Mais, en réalité, il n'est que du *premier degré*. Le coefficient de $c_\alpha^p c_\beta^p$ dans $G_i(\xi^p, t)$ est

$$K_i(t) = \frac{1}{2}\sum_j\sum_k p_{ijk}(t)\gamma_j^\alpha(t)\gamma_k^\beta(t) = \frac{1}{2}\sum_j\sum_k p_{ijk}(t)\frac{\partial Z_j}{\partial\mu_\alpha}\frac{\partial Z_k}{\partial\mu_\beta}.$$

Je dis que $A_i(T, K) = 0$.

En effet, considérons la solution périodique $Z_i(t, \mu + \lambda\nu)$ du système principal, les ν_α désignant des constantes arbitraires. On peut écrire (67), en y remplaçant g_i par zéro et les x_j par

$$x_j = \frac{1}{\lambda}[Z_j(t, \mu + \lambda\nu) - Z_j(t, \mu)] = \sum_\alpha \frac{\partial Z_j}{\partial\mu_\alpha}\nu_\alpha + O(\lambda).$$

Avec ces x_j, les conditions (76) sont nécessairement vérifiées, quels que soient λ et les ν_α. Or, si λ tend vers zéro, le coefficient de $\nu_\alpha\nu_\beta$ dans G_i a pour limite $K_i(t)$; on a donc bien $A_i(T, K) = 0$, comme nous l'avons annoncé (1).

---

(1) On peut aussi faire une vérification directe. Posons

$$\sum_{k=1}^{m} H_k^i p_{kjh} = P_{jh}^i.$$

Il faut prouver que $\int_0^T \left(\sum_j\sum_h P_{jk}^i \gamma_j^\alpha \gamma_h^\beta\right) dt = 0$. En dérivant $\frac{\partial Z_k}{\partial t} = f_k$, on a

$$\frac{\partial^2\gamma_k^\alpha}{\partial\mu_\beta\,\partial t} = \frac{\partial^3 Z_k}{\partial\mu_\alpha\,\partial\mu_\beta\,\partial t} = \sum_j\sum_h p_{kjh}\gamma_j^\alpha\gamma_h^\beta + \sum_j p_{kj}\frac{\partial\gamma_j^\alpha}{\partial\mu_\beta}.$$

D'où

$$X = \sum_j\sum_h P_{jh}^i\gamma_j^\alpha\gamma_h^\beta = \sum_k H_k^i\left(\frac{\partial^2\gamma_k^\alpha}{\partial\mu_\beta\,\partial t} - \sum_j p_{kj}\frac{\partial\gamma_j^\alpha}{\partial\mu_\beta}\right),$$

$$\int_0^T X\,dt = \left[\sum_k H_k^i\frac{\partial\gamma_k^\alpha}{\partial\mu_\beta}\right]_0^T - \int_0^T\left[\sum_k\sum_j\frac{\partial\gamma_j^\alpha}{\partial\mu_\beta}\left(\frac{dH_j^i}{dt} + \sum_k p_{kj}H_k^i\right)\right]dt.$$

L'intégrale du second membre est nulle, d'après (17). D'autre part, les fonctions $\frac{\partial\gamma_k^\alpha}{\partial\mu_\beta}$ sont périodiques. D'après (19), il en est de même des H_k^i, puisque $i \leq n$ et que le groupe correspondant à la racine $S = 1$ est un groupe simple. Donc, le terme intégré est également nul.

31. L'équation (84) se réduit à

$$\sum_{\alpha=1}^{n} C_i^\alpha c_\alpha^p = \rho_i,$$

avec

$$C_i^\alpha = \sum_{h=1}^{m} \int_0^T H_h^i \left[\sum_{j,k} p_{hjk} (y_j^\alpha \varphi_k + y_k^\alpha \varphi_j) + \sum_j q_{ij} y_j^\alpha \right] dt,$$

$$\rho_i = - L_i - \lambda A_i(T, P^p + J^p),$$

$$L_i = \sum_{h=1}^{m} \int_0^T H_h^i \left[\sum_{j,k} p_{hjk} \varphi_j \varphi_k + \sum_j q_{ij} \varphi_j \right] dt.$$

Écartons le cas exceptionnel où le déterminant $\| C_i^\alpha \|$ serait nul. En résolvant le système linéaire ci-dessus, nous obtenons

$$c_\alpha^p = \gamma_\alpha + \lambda Q_\alpha^p, \tag{85}$$

avec

$$\gamma_\alpha = \sum_{i=1}^{n} E_\alpha^i L_i, \qquad Q_\alpha^p = \sum_{i=1}^{n} E_\alpha^i A_i(T, P^p + J^p).$$

Les E_α^i sont des coefficients constants, résultant des formules de Cramer. Les γ_α sont également des constantes connues. Quant aux Q_α^p, ils contiennent les inconnues c_β^p par l'intermédiaire des x_i^p.

D'après (83), on a

$$\frac{\partial P_i^p}{\partial c_\beta^p} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k p_{ijk} (y_j^\beta \theta_k + y_k^\beta \theta_j).$$

D'où, d'après (80),

$$\left| \frac{\partial A_i(T, P^p)}{\partial c_\beta^p} \right| < A^2 m^2 M_2 Y R' \left[\frac{m R'}{2} M_2 + N_1 + \lambda (M_2 + N_2) \right].$$

Puis

$$\frac{\partial J_i^p}{\partial c_\beta^p} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial J_i}{\partial x_k} y_k^\beta.$$

D'où, d'après (74),

$$\left| \frac{\partial A_i(T, J^p)}{\partial c_\beta^p} \right| < A m^2 Y R' (M_2 + N_2).$$

Si l'on appelle E le plus grand des $|E_\alpha^i|$, on a donc

$$\left| \frac{\partial Q_\alpha^p}{\partial c_\beta^p} \right| < E n A m^2 Y R' \left[A m M_2 \left(\frac{m R'}{2} M_2 + N_1 + \lambda M_2 + \lambda N_2 \right) + M_2 + N_2 \right] = Q. \tag{86}$$

De plus, les dérivées $\frac{\partial Q_\alpha^p}{\partial c_\beta^p}$ sont des fonctions continues des c_β^p. Dès lors, on peut appliquer le *théorème des fonctions implicites* au système (84).

32. Utilisons la démonstration de ce théorème par la méthode des approximations successives (¹). Imposons aux c_α^ρ la condition d'avoir un module $< C$. On a, d'après (83),

$$P_i^\rho < m^2 M_2 \Theta \left(nYC + AN_0 + \frac{\lambda}{2}\Theta \right) + mN_1\Theta = P.$$

En multipliant le second membre par A, on a une limite supérieure de $|A_i(T, P^\rho)|$. D'autre part, on a, d'après (73),

$$A_i(T, J^\rho) < A m R'(M_2 + N_2).$$

Donc,

$$Q_\alpha^\rho < nEA[P + mR'(M_2 + N_2)].$$

Appelons γ le plus grand des $|\gamma_\alpha|$; la condition $|c_\alpha^\rho| < C$ est entraînée par

$$\gamma + \lambda nEA m \left[R'(M_2 + N_2) + mM_2\Theta\left(nYC + AN_0 + \frac{\lambda}{2}\Theta \right) + N_1\Theta \right] < C$$

ou

$$C(1 - \lambda n^2 m^2 EAM_2 Y\Theta) > \gamma + \lambda nmEA\left[R'(M_2 + N_2) + mM_2\Theta\left(AN_0 + \frac{\lambda}{2}\Theta \right) + N_1\Theta \right], \tag{87}$$

ce qui exige

$$\lambda n^2 m^2 EAM_2 Y\Theta < 1. \tag{88}$$

Ces conditions étant remplies, la convergence des approximations est assurée si l'on a

$$\lambda Q < 1. \tag{89}$$

Le système (85) admet alors une solution fonction continue de λ et telle que $|c_\alpha^\rho| < C$; d'où $|x_i^\rho| < nYC + AN_0 + \lambda\Theta$. La condition $|x_i^\rho| < R'$ est donc assurée si l'on a

$$nYC - AN_0 + \lambda\Theta < R'. \tag{90}$$

33. Examinons maintenant la convergence des x_i^ρ, c_α^ρ. Posons

$$u_i^\rho = x_i^\rho - x_i^{\rho-1}, \qquad v_\alpha^\rho = c_\alpha^\rho - c_\alpha^{\rho-1}$$

et supposons $|u_i^\rho| < U_\rho$ et $|v_\alpha^\rho| < V_\rho$. On a

$$u_i^{\rho+1} = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^{\rho+1} y_i^\alpha(t) + \lambda(\theta_i^{\rho+1} - \theta_i^\rho).$$

Or,

$$\theta_i^{\rho+1} - \theta_i^\rho = B_i(t, F^\rho - F^{\rho-1}).$$

(¹) *Cf.* Valiron. *Théorie des fonctions*, n° 122.

Les fonctions F_k ont des dérivées premières continues par rapport aux x_j. D'après (68), (72) et (74), leurs modules sont bornés par

$$a = m\mathrm{R}'\mathrm{M}_2 + \mathrm{N}_1 + \lambda m\mathrm{R}'(\mathrm{M}_3 + \mathrm{N}_2); \tag{91}$$

on a donc

$$|\mathrm{F}_k^p - \mathrm{F}_k^{p-1}| < a\mathrm{U}_p.$$

D'où

$$|\theta_i^{p+1} - \theta_i^p| < \mathrm{A}a\mathrm{U}_p.$$

Et l'on peut prendre

$$\mathrm{U}_{p+1} = n\mathrm{Y}\mathrm{V}_{p+1} + \lambda\mathrm{A}a\mathrm{U}_p. \tag{92}$$

La formule (85) nous donne $c_\alpha^{p+1} = \lambda(\mathrm{Q}_\alpha^{p+1} - \mathrm{Q}_\alpha^p)$. Or,

$$|\mathrm{P}_i^{p+1} - \mathrm{P}_i^p| < \sum_{\beta=1}^{n} \left|\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial r_\beta}\right| \mathrm{V}_{p+1} + \sum_{j=1}^{m} \left|\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial \theta_j}\right| \mathrm{A}a\mathrm{U}_p.$$

On a

$$\left|\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial r_\beta}\right| < m^2\mathrm{M}_2\mathrm{Y}\Theta.$$

Puis

$$\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial \theta_j} = \sum_k p_{ijk}(\xi_k + \lambda\vartheta_k) + q_{ij};$$

d'où

$$\left|\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial \theta_j}\right| < m\mathrm{M}_2\mathrm{R}' + \mathrm{N}_1.$$

Donc,

$$|\mathrm{P}_i^{p+1} - \mathrm{P}_i^p| < nm^2\mathrm{M}_2\mathrm{Y}\Theta\mathrm{V}_{p+1} + m(m\mathrm{M}_2\mathrm{R}' + \mathrm{N}_1)\mathrm{A}a\mathrm{U}_p.$$

Puis, d'après (74),

$$|\mathrm{J}_i^{p+1} - \mathrm{J}_i^p| < m^2\mathrm{R}'(\mathrm{M}_3 + \mathrm{N}_2)\mathrm{U}_{p-1}.$$

On peut donc prendre

$$\mathrm{V}_{p-1} = \lambda(b\mathrm{V}_{p-1} + c\mathrm{U}_p + d\mathrm{U}_{p-1}), \tag{93}$$

avec

$$b = \mathrm{A}nm^2\mathrm{M}_2\mathrm{Y}\Theta, \qquad c = m\mathrm{A}^2a(m\mathrm{M}_2\mathrm{R}' + \mathrm{N}_1), \qquad d = \mathrm{A}m^2\mathrm{R}'(\mathrm{M}_3 + \mathrm{N}_2). \tag{94}$$

De (92) et (93), on tire

$$\mathrm{U}_{p+1} = \lambda\mathrm{U}_p \frac{\mathrm{A}a(1 - \lambda b) + nc\mathrm{Y}}{1 - \lambda b - \lambda dn\mathrm{Y}} < \lambda\mathrm{U}_p \frac{\mathrm{A}a + nc\mathrm{Y}}{1 - \lambda b - \lambda dn\mathrm{Y}}.$$

La convergence uniforme est assurée si l'on a

$$\lambda(\mathrm{A}a + nc\mathrm{Y} + b + dn\mathrm{Y}) < 1. \tag{95}$$

34. En définitive, le système (64) admet certainement une solution périodique si les inégalités (71), (87), (88), (89), (90), (95) sont toutes vérifiées.

D'après (87), C doit être $> \gamma$; prenons $C = 2\gamma$. Puis $R' = AN_0 + 3nY\gamma$. Les inégalités (87) et (90) deviennent

$$\lambda nmEA\left[nmM_2\Theta + R'(M_2 + N_2) + (mM_2AN_0 + N_1)\Theta + \frac{\lambda}{2}mM_2\Theta^2\right] < \gamma. \tag{96}$$

$$\lambda\Theta < nY\gamma. \tag{97}$$

Le nombre λ doit maintenant vérifier les inégalités (71), (88), (89), (95), (96), (97). Il est évident qu'il suffit pour cela de prendre λ assez petit. Donc,

Théorème. — *Le système* (64) *admet certainement une solution périodique si* λ *est inférieur à une certaine limite non nulle* λ_1.

La démonstration précédente nous donne le moyen de calculer cette solution avec une approximation théoriquement illimitée. Si l'on s'en tient à la *première approximation*, on a

$$x_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \gamma_\alpha y_i^\alpha(t) + \varphi_i(t), \tag{98}$$

les φ_i étant donnés par (78) et les γ_α par le système linéaire

$$A_i[T, G(\xi, t)] = 0, \qquad \xi_k = \sum_{\alpha=1}^{n} \gamma_\alpha y_k^\alpha + \varphi_k. \tag{99}$$

35. *Stabilité.* — Pour que la solution périodique soit stable, il faut et il suffit (n° 23) que les décréments du système associé à (64) aient tous leur module < 1. Ce système s'écrit

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_j r_{ij}(t) y_j, \tag{100}$$

avec

$$r_{ij}(t) = f_{ij}(Z + \lambda x, t) + \lambda g_{ij}(Z + \lambda x, t),$$

les x_i étant les fonctions périodiques précédemment calculées. Cette formule s'écrit

$$r_{ij}(t) = p_{ij}(t) + \lambda s_{ij}(t) + O(\lambda^2),$$

avec

$$s_{ij}(t) = \sum_k p_{ijk}(t) x_k(t) + q_{ij}(t), \tag{101}$$

les $x_k(t)$ étant réduits à la première approximation, donnée par (98).

Pour $\lambda = 0$, l'un des décréments $S_1 = 1$; les autres ont un module < 1.

Comme les $r_{ij}(t)$ sont des fonctions continues de λ, il en est de même des coefficients de l'équation en S, d'après les formules (7) et la convergence uniforme des a_{ij}. Il s'ensuit que, pour λ très petit, on a n décréments voisins

de *un*, soit $1+\lambda\sigma_h$, et $m-n$ décréments voisins des autres S_j, donc de module <1, si λ est assez petit.

Or, si $\sigma_h=\alpha_h+i\beta_h$, on a

$$|1+\lambda\sigma_h|^2=1+2\lambda\alpha_h+\lambda^2(\alpha_h^2+\beta_h^2).$$

La condition cherchée est donc $\alpha_h<0$; *tous les* σ_h *doivent avoir une partie réelle négative,* sous réserve *que* λ *soit assez petit.*

36. Voyons maintenant comment on peut calculer ces σ_h. Pour $\lambda=0$, le système (100) admet la solution périodique $u_i(t)=\sum_{h=1}^{n}\rho_h y_i^h(t)$, les ρ_h désignant des coefficients constants arbitraires. Pour λ infiniment petit, il admet la solution voisine $y_i(t)=u_i(t)+\lambda v_i(t)+\varepsilon(\lambda^2)$. Les fonctions v_i vérifient le système

$$\frac{dv_i}{dt}=\sum_{j=1}^{m}p_{ij}(t)v_j+\psi_i(t),$$

avec

$$\psi_i(t)=\sum_{j=1}^{m}s_{ij}(t)u_j(t).$$

L'intégrale générale de ce système est

$$v_i(t)=\sum_{j=1}^{m}y_i^j(t)[u_j+K_j(t)], \qquad K_j(t)=\Lambda_j(t,\psi). \tag{102}$$

Écrivons que $y_i(T)=(1+\lambda\sigma)y_i(0)$, c'est-à-dire

$$u_i(T)+\lambda v_i(T)=(1+\lambda\sigma)[u_i(0)+\lambda v_i(0)]+O(\lambda^2).$$

En tenant compte de $u_i(T)=u_i(0)$, divisant par λ et faisant tendre λ vers zéro, il vient

$$v_i(T)=\sigma u_i(0)+v_i(0),$$

ou, d'après (102),

$$\sum_{j=1}^{m}S_j y_i^j(0)[u_j+K_j(T)]-\sigma u_i(0)-\sum_{j=1}^{m}y_i^j(0)u_j=0,$$

ou, en tenant compte de ce que $S_j=1$ pour $j\leq n$ et posant $a_j(S_j-1)=b_j$ pour $j>n$,

$$\sum_{j=n+1}^{m}b_j y_i^j(0)+\sum_{j=1}^{m}S_j K_j(T)y_i^j(0)-\sigma\sum_{\alpha=1}^{n}\rho_\alpha y_i^\alpha(0)=0.$$

Ceci s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n}[K_j(T)-\sigma\rho_\alpha]y_i^\alpha(o)+\sum_{j=n+1}^{m}[b_j+S_jK_j(T)]y_i^j(o)=o.$$

Le déterminant $\|y_i^j(o)\|$ étant $\neq o$, on a

$$K_j(T)-\sigma\rho_j=o, \quad j\leq n; \qquad b_j+S_jK_j(T)=o, \quad j>n. \tag{103}$$

D'autre part,

$$K_j(T)=\sum_{\alpha=1}^{n}\rho_\alpha K_j^\alpha,$$

avec

$$K_j^\alpha=\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{m}\int_0^T H_k^j(t)s_{kh}(t)y_h^\alpha(t)\,dt$$

ou, d'après (101) et (98),

$$K_j^\alpha=\sum_k\sum_h\int_0^T H_k^j(t)\left[\sum_l p_{khl}(t)\left(\sum_{\beta=1}^{n}\gamma_\beta y_l^\beta+\varphi_l\right)+q_{kh}(t)\right]y_h^\alpha(t)\,dt.$$

Le coefficient de γ_β est nul (n° 30). Donc

$$K_j^\alpha=\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{m}\int_0^T H_k^j(t)\left[\sum_l p_{khl}(t)\varphi_l(t)+q_{kh}(t)\right]y_h^\alpha(t)\,dt. \tag{104}$$

Portant dans (103), il vient

$$\sum_{h=1}^{n}\rho_h K_j^h(T)-\sigma\rho_j=o \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Éliminons les ρ_h

$$\begin{vmatrix} K_1^1(T)-\sigma & K_1^2(T) & \ldots & K_1^n(T) \\ K_2^1(T) & K_2^2(T)-\sigma & \ldots & K_2^n(T) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ K_n^1(T) & K_n^2(T) & \ldots & K_n^n(T)-\sigma \end{vmatrix}=o. \tag{105}$$

Telle est l'équation déterminant les σ_h; nous l'appellerons *l'équation de stabilité*.

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est que toutes ses racines aient leur partie réelle négative, sous réserve *que* λ *soit assez petit*.

Remarque. — Supposons que *chaque fonction perturbatrice* g_k *soit la somme de plusieurs fonctions perturbatrices partielles* et tenons-nous en à la première approximation.

L'équation (75) peut être obtenue en additionnant les équations analogues correspondant aux différentes fonctions perturbatrices particlles. De même, la formule (104) nous montre que *chaque* K_j^α *peut être obtenu en additionnant les* K_j^α *correspondant aux différentes fonctions perturbatrices partielles*. Cela résulte de ce que cette formule contient φ_i et g_{kh} linéairement et de ce que la formule (78) est également linéaire par rapport aux g_k.

37. La condition de stabilité étant supposée remplie, appelons (Γ_0) la trajectoire fermée correspondant à $\lambda = 0$. Elle est parcourue par le point P_0, de coordonnées $Z_i(t, \mu)$. Appelons A_0 la position de P_0 pour $t = 0$.

Supposons maintenant $\lambda > 0$ et suffisamment petit. Nous avons une trajectoire fermée (Γ_λ), parcourue périodiquement par le point P_λ. Appelons A_λ la position de P_λ pour $t = 0$. Lorsque λ croit à partir de zéro, A_λ part de A_0 et décrit un certain arc A_0H.

Autour de A_λ existe un certain domaine de stabilité (Δ_λ), contenant le domaine linéaire (D_λ) du n° 23.

Supposons maintenant que λ tende vers zéro. Les n décréments $1 + \lambda\sigma_h$ tendent vers *un*. Donc (n° 23), le domaine (D_λ) se réduit, à la limite, au point A_0. Mais, on peut se demander quelle est la limite (Δ_0) du domaine complet (Δ_λ). Nous ne pouvons pas répondre à cette question d'une manière précise. Examinons seulement si (Δ_0) peut contenir un arc de (Γ_0) comprenant A_0. Soit B_0 un point de cet arc. Faisons partir, au temps zéro, M de B_0 et P de A_λ, en supposant λ assez petit pour que B_0 appartienne à (Δ_λ). Nous savons que la distance MP tend vers zéro pour $t = +\infty$. Faisons maintenant tendre λ vers zéro, en laissant B_0 fixe. A la limite, A_λ vient en A_0. La distance MP tend encore vers zéro pour $t = +\infty$. Ceci n'est possible que si B_0 appartient au domaine *restreint* de stabilité du point A_0. Il en résulte que ce domaine restreint contiendrait l'arc ci-dessus.

Il est probable que ceci n'a pas lieu en général; mais, nous n'en sommes pas sûrs. Il y a toutefois un cas où nous avons cette certitude; c'est le cas où les fonctions principales sont indépendantes de t (n° 37). En effet, dans ce cas, les points M et P décrivent tous deux périodiquement la trajectoire (Γ_0). Leur distance est fonction périodique de t et par conséquent ne peut pas tendre vers zéro.

38. *Cas où les fonctions principales sont indépendantes de t.* — Supposons qu'il existe *une seule solution périodique* $Z_i(t)$, à un changement près de l'origine des t. On en déduit la solution plus générale $Z_i(t + \mu)$, μ désignant une constante arbitraire. On rentre dans le cas du n° 26, avec $n = 1$.

Le système linéaire associé admet la solution périodique $Z_i'(t + \mu)$. L'équation en S admet la racine simple $S = 1$.

Si l'on change t en $t - \mu$, les $Z_i(t + \mu)$ deviennent $Z_i(t)$; les fonctions $p_{ij}(t, \mu)$ du n° 27 deviennent les fonctions $p_{ij}(t)$ obtenues en remplaçant les z_i par les

$Z_i(t)$ dans les $f_{ij}(z)$; *elles ne contiennent pas* μ. Les $g_i(Z, t)$ des équations (67) deviennent $g_i[Z(t), t-\mu]$. Les équations (75) se réduisent à la suivante :

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^T H_k^1(t)\,g_k[Z(t), t-\mu]\,dt = 0. \tag{106}$$

L'équation (105) se réduit à $\sigma = K_1^1(T)$ ou, d'après (104),

$$\sigma = \sum_k \sum_h \int_0^T H_k^1(t)\left[\sum_i p_{khi}(t)\varphi_i(t) + g_{kh}(Z, t-\mu)\right] Z_h'\,dt.$$

Mais, on a

$$\frac{d(p_{ki})}{dt} = \sum_h p_{kih} Z_h'.$$

Donc,

$$\sigma = \sum_k \sum_i \int_0^T H_k^1(t)\varphi_i(t)\,d(p_{ki}) + \sum_k \sum_h \int_0^T H_k^1(t)\,g_{kh}(Z, t-\mu)\,dZ_h. \tag{107}$$

La condition de stabilité est que le nombre σ, que nous appellerons *indice de stabilité*, soit < 0.

Remarque. — Si chaque g_k est la somme de plusieurs fonctions partielles, *l'indice de stabilité est la somme des indices partiels* correspondant aux différents termes de g_k. Cela résulte de la remarque du n° 36.

39. *Cas où les fonctions principales et la période dépendent d'un paramètre.* — Supposons que les f_i dépendent d'un certain paramètre α, tout en restant *indépendantes de t*. Supposons en outre que le système principal admette une solution périodique $Z_i(t, \alpha)$, quelle que soit la valeur attribuée à ce paramètre. La période de cette solution est une fonction déterminée $T = \varphi(\alpha)$, que nous supposons continue et à dérivée continue.

Voyons d'abord les conséquences analytiques résultant de ces hypothèses.

Les $Z_i(t, \alpha)$ étant considérées comme des fonctions des variables indépendantes t et α, posons $u_i = \frac{\partial Z_i}{\partial \alpha}$. En dérivant $\frac{\partial Z_i}{\partial t} = f_i(Z, \alpha)$ par rapport à α, on a

$$u_i'(t) = \sum_j p_{ij}(t) u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha}.$$

D'où

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{m} [a_j + A_j(t)]\,y_j^i(t),$$

les $A_j(t)$ étant obtenus par la formule (24), en remplaçant f_k par $\frac{\partial f_k}{\partial \alpha}$. Dérivons l'identité $Z_i(T, \alpha) = Z_i(0, \alpha)$ par rapport à α :

$$Z_i'(T)\varphi'(\alpha) + u_i(T) = u_i(0).$$

En tenant compte de l'expression ci-dessus de $u_i(t)$, ceci s'écrit

$$\sum_{j=1}^{m} y_i^j(0)a_j(S_j-1)+\sum_{j=1}^{m} A_j(T)S_j y_i^j(0)+\varphi'(\alpha)Z_i(0)=0.$$

Convenons que $y_i^1(t)$ est $Z_i'(t)$ de sorte que $S_1=1$. Nous avons

$$y_i^1(0)[A_1(T)+\varphi'(\alpha)]+\sum_{j=2}^{m} y_i^j(0)[a_j(S_j-1)+S_jA_j(T)]=0.$$

On en conclut que tous les crochets sont nuls, en particulier le premier. On a donc l'identité

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^T H_k^1(t)\frac{\partial f_k}{\partial\alpha}\,dt+\varphi'(\alpha)=0. \tag{108}$$

40. Supposons maintenant que les fonctions perturbatrices $g_i(z,t)$ aient une période déterminée $T=\varphi(\alpha)$. Supposons d'autre part que la valeur numérique α' attribuée à α dans les fonctions $f_i(z,\alpha)$ soit voisine de α, de telle sorte que la période $T'=\varphi(\alpha')$, que nous appellerons la *période propre* du système principal, soit voisine de T. Posons $\alpha'=\alpha+\lambda\beta$. Les équations (64) peuvent s'écrire

$$\frac{dz_i}{dt}=f_i(x,\alpha)+\lambda[g_i(z,t)+h_i(z)],$$

avec

$$h_i(z)=\frac{f_i(z,\alpha+\lambda\beta)-f_i(z,\alpha)}{\lambda}.$$

A ce système nous pouvons appliquer la théorie générale précédente, les fonctions perturbatrices étant g_i+h_i, de période T par rapport à t. L'équation (106) s'écrit

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^T H_k^1(t)[g_k(Z,t-\mu)+h_k(z)]\,dt=0.$$

C'est l'équation en μ, qui *détermine un certain nombre de solutions admettant la période* T *des fonctions perturbatrices* $g_k(z,t)$.

Si λ est très petit, on a approximativement $h_k(Z)=\beta\frac{\partial f_k}{\partial\alpha}$. En tenant compte de (108), l'équation ci-dessus s'écrit alors *approximativement*

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^T H_k^1(t)\,g_k(Z,t-\mu)\,dt=\beta\varphi'(\alpha).$$

Or, si l'on pose $\Delta T=T'-T$, on a *approximativement* $\Delta T=\lambda\beta\varphi'(\alpha)$. Donc, l'équation précédente s'écrit

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^T H_k^1(t)\,g_k(Z,t-\mu)\,dt=\frac{\Delta T}{\lambda}. \tag{109}$$

41. Supposons maintenant *que les fonctions perturbatrices g_k soient indépendantes de t.* Dans ce cas, l'équation (109) ne contient plus l'inconnue μ. Par contre, la période T du n° 40 est indéterminée. Nous pouvons alors la considérer comme une inconnue. La théorie précédente nous prouve que *le système* (64) *admet une solution périodique* dont la période s'obtient en ajoutant ΔT à la période propre T'. La formule (109) nous donne, à $o(\lambda^2)$ près, la *perturbation de période apportée par les fonctions perturbatrices* g_k.

42. L'*indice de stabilité* σ est donné par la formule (107). D'après la remarque du n° 38, c'est la somme des indices partiels correspondant aux fonctions g_i et aux fonctions $h_i = \beta \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} + o(\lambda)$. Or, le second de ces indices partiels est identiquement nul. En effet, la solution $Z_i(t, \alpha)$ étant périodique quel que soit α. l'équation en S admet la racine $S = 1$ quel que soit α. Comme cette racine vaut asymptotiquement $1 + \lambda\sigma$, on a nécessairement $\sigma = 0$.

Il résulte de là que *l'indice de stabilité peut être calculé en tenant compte uniquement des fonctions perturbatrices* g_i.

Remarque. — On peut supposer que les f_i du n° 39 dépendent de t, mais que la solution périodique Z dépend, comme au n° 26, de n paramètres μ_β. On a, dans ce cas, n équations analogues à (109) et l'équation de stabilité (105). Bien entendu, les y_i^3 sont les $\frac{\partial Z_i}{\partial \mu_\beta}$, comme au n° 26. La démonstration ci-dessus ne subit aucune modification.

43. *Couplage de plusieurs systèmes.* — Considérons n systèmes (Σ_1), (Σ_2), ..., (Σ_n) analogues à celui du n° 39. Réunissons-les en un système unique (Σ) par l'introduction des fonctions perturbatrices $g_i(z, t)$ dépendant à la fois des coordonnées de tous les (Σ_j) et admettant la période T par rapport à t. Nous dirons que les (Σ_j) sont *couplés* par ces fonctions.

Les coordonnées z_i seront numérotées de telle manière que pour

$$s_j' = s_{j-1} + 1 \leq i \leq s_j,$$

z_i soit une coordonnée de (Σ_j). Le nombre des coordonnées de (Σ_j) est donc $s_j - s_{j-1}$. Nous convenons bien entendu que $s_0 = 0$. Les indices vérifiant la double inégalité ci-dessus constitueront *le groupe* (j).

La fonction principale f_i dépend uniquement des z_k dont l'indice appartient au même groupe que i. Elle dépend aussi du paramètre α_j si i appartient au groupe (j). La solution périodique principale $Z_i(t, \alpha_j)$ a la période $T_j = \varphi_j(\alpha_j)$.

Choisissons les α_j de telle manière que l'on ait $\frac{T_j}{T} = \frac{N}{N_j}$, N et les N_j désignant des nombres entiers premiers entre eux. Supposons maintenant que les α_j

prennent des valeurs $\alpha'_j = \alpha_j + \lambda\beta_j$ voisines des précédentes. Nous appellerons *période propre* de (Σ_j) la période $T'_j = \varphi_j(\alpha'_j)$, voisine de T_j. Nous posons

$$T'_j = T_j(1 + \lambda\varepsilon_j), \tag{110}$$

de sorte que

$$\varepsilon_j\varphi_j(\alpha_j) = \beta_j\varphi'_j(\alpha_j) + O(\lambda).$$

44. Faisons le changement de variable $t = N\theta$ et posons

$$h_i(z) = \frac{1}{\lambda}[f_i(z, \alpha'_j) - f_i(z, \alpha_j)] = \beta_j\frac{\partial f_i}{\partial\alpha_j} + O(\lambda),$$

l'indice i appartenant au groupe (j). Les équations différentielles deviennent

$$\frac{dz_i}{d\theta} = Nf_i(z, \alpha_j) + \lambda N[g_i(z, N\theta) + h_i(z)]. \tag{111}$$

Les fonctions entre crochets *jouent le rôle de fonctions perturbatrices pour le système* (Σ); *elles admettent* évidemment *la période* T *par rapport à* θ.

Le système principal admet la *solution périodique principale* $Z_i(N\theta + \mu_j, \alpha_j)$, qui admet bien la période T par rapport à θ, car si θ augmente de T, $N\theta$ augmente de $NT = N_jT_j$, c'est-à-dire d'un multiple de la période T_j de $Z_i(t + \mu_j, \alpha_j)$.

Le système (111) *rentre donc dans le type du système* (64) et nous pouvons lui appliquer les résultats obtenus aux n^{os} 26 à 36.

Le système linéaire associé se décompose en n systèmes partiels, correspondant aux différents (Σ_j). Les fonctions $p_{ik}(t)$ et $p_{ikh}(t)$ ne sont $\not\equiv 0$ que si les indices i, k, h appartiennent au même groupe. Il en est de même des $y_i^k(t)$ et des $H_i^k(t)$. Nous conviendrons de ranger les y_i^k du groupe (j) par exemple, de telle manière que, pour $k = s_j$, on ait $y_i^k = Z'_i(t)$. Bien entendu, dans toutes ces fonctions, t doit être remplacé par $N\theta + \mu_j$, si les indices appartiennent au groupe (j).

45. A chaque (Σ_j) correspond une équation en μ, qui s'écrit, en divisant par N,

$$\sum_{k=s'_j}^{s_j}\int_0^T H_k^{s_j}(t + \mu_j)[g_k(Z, t) + h_k(Z)]\,d\theta = 0.$$

Le terme $h_k(Z)$ dépend seulement des Z_i d'indice appartenant au groupe (j), il admet la période T_j par rapport à t, de même que $H_k^{s_j}$. L'intégrale correspondante peut se calculer en prenant t pour variable d'intégration; elle vaut, en tenant compte de la périodicité ci-dessus, puis de (109) et (110),

$$\frac{N_j}{N}\int_0^{T_j} H_k^{s_j}(t + \mu_j)h_k(Z)\,dt = -T\varepsilon_j.$$

L'équation en μ s'écrit donc

$$(112)\qquad \sum_{k=s'_j}^{s'_j}\int_0^T H_k^j(N\theta+\mu_j)\,g_k(Z,N\theta)\,d\theta = T\varepsilon_j \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Elle contient tous les μ_h, qui figurent dans les g_k. On obtient ainsi le système des *équations en* μ.

46. Pour la *stabilité*, on écrit l'équation (105), chaque K_j^α se calculant par la formule (104). Les indices j et α doivent être choisis parmi les s_r; prenons par exemple $j=s_r$ et $\alpha=s_\beta$. Comme au n° 42, le terme $h_k(Z)$ de la fonction perturbatrice totale ne donne rien. Remarquons maintenant que, d'après (111), les fonctions f et g doivent être multipliées par N; donc aussi p_{khi} et q_{kh}, ainsi que φ_i, d'après (78). D'autre part, l'indice k doit appartenir au groupe (r) et h doit appartenir au groupe (β). Le terme en φ_i n'existe que si i, k, h appartiennent au même groupe, ce qui n'est possible que si $r=\beta$, donc $j=\alpha$. On a dès lors

$$(113)\qquad K_j^\alpha = NA_j^\alpha, \qquad \text{si } j\neq\alpha; \qquad K_j^j = NA_j^j + N^2A'_{jj},$$

en posant

$$(114)\quad \begin{cases} A_j^\alpha = \displaystyle\sum_{k=s'_r}^{s_r}\sum_{h=s'_\beta}^{s_\beta}\int_0^T H_k^j(N\theta+\mu_r)\,y_h^\alpha(N\theta+\mu_\beta)\,q_{kh}(N\theta)\,d\theta, \\ A_j^j = \displaystyle\sum_{k=s'_r}^{s_r}\sum_{h=s'_r}^{s_r}\sum_{i=s'_r}^{s_r}\int_0^T p_{khi}(N\theta+\mu_r)\,\varphi_i(N\theta)\,H_k^j(N\theta+\mu_r)\,y_h^j(N\theta+\mu_r)\,d\theta. \end{cases}$$

Portons dans l'équation (105), en posant $\sigma=N\sigma'$; nous obtenons

$$(115)\qquad \begin{vmatrix} NA'_1+A_1^1-\sigma' & A_1^2 & \ldots & A_1^n \\ A_2^1 & NA'_2+A_2^2-\sigma' & \ldots & A_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n^1 & A_n^2 & \ldots & NA'_n+A_n^n-\sigma' \end{vmatrix} = 0.$$

47. Les T'_j et T étant donnés, les rapports $\frac{T'_j}{T}$ peuvent être approchés autant qu'on le veut et d'une infinité de manières, par des nombres commensurables. On peut donc se demander si le problème du couplage admet une infinité de solutions, quelles que soient les valeurs des T'_j et T. En réalité, il n'en est rien, parce que *le nombre* N *ne doit pas dépasser une certaine limite*.

Reportons-nous en effet à la démonstration des n^{os} 27 à 34, en l'appliquant au système (111), dans le cas où N est très grand.

Les nombres appelés M_i, N_i sont tous multipliés par N. D'après (78) et (79), il en est de même des φ_i et des θ_i^0. Les p_{hjk} et q_{ij} le sont également. On en conclut (n° 31) que $C_i^\alpha = O(N^2)$; d'où $E_\alpha^i = O(N^{-2})$ et $E = O(N^{-2})$. Or $L_i = O(N^3)$;

donc $\gamma_2 = O(N)$ et par suite $\gamma = O(N)$; d'où (n° 34) $R' = O(N)$. D'après (71), on en conclut que λ vaut au plus $O(N^{-1})$. De (80) on déduit ensuite $\Theta = O(N^3)$. Portant dans (88), on a $\lambda = O(N^{-2})$. De (86) on déduit $Q = O(N^2)$ et (89) donne de nouveau $\lambda = O(N^{-2})$. On a ensuite (n° 33) : $a = O(N^2)$, $b = O(N^3)$ $c = O(N^4)$, $d = O(N^3)$. Portant dans (95), on obtient $\lambda = O(N^{-4})$. Enfin (96) et (97) donnent $\lambda = O(N^{-2})$.

En définitive, on voit que la limite supérieure $\lambda_1 = O(N^{-4})$ peut devenir, si N est trop grand, inférieure à la valeur numérique attribuée à λ, auquel cas notre démonstration est en défaut.

Signalons encore que, pour N très grand, les racines de l'équation (115) sont asymptotiquement $\sigma_i' = NA_i'$; d'où $\sigma_i = N^2 A_i'$. En se reportant au n° 35, on en conclut d'abord que les A_i' doivent être < 0: puis, si cette condition est remplie, que la limite imposée à λ par la stabilité vaut $O(N^{-2})$. Elle est donc très petite si N est très grand.

48. *Méthode de la variation des constantes.* — Revenons au système (64) en supposant les f_i *indépendantes de t.* Admettons *que l'on connaisse l'intégrale générale du système principal*

$$z_i = \varphi_i(t + y_m, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}), \tag{116}$$

les y_i désignant les constantes d'intégration. Supposant maintenant $\lambda \neq 0$, faisons le changement de variables

$$z_i = \varphi_i(0, y_1, \ldots, y_{m-1}), \qquad t + y_m = 0. \tag{117}$$

La nouvelle variable indépendante est 0; les nouvelles fonctions inconnues sont les y_i. Les nouvelles équations s'écrivent

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial 0}\, d0 + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\, dy_j = [f_i(z) + \lambda g_i(z, 0 - y_m)]\,(d0 - dy_m)$$

ou, en tenant compte de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial 0} = f_i$,

$$(f_i + \lambda g_i)\, dy_m + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\, dy_j = \lambda g_i\, d0.$$

D'où l'on tire

$$\frac{dy_i}{d0} = \lambda G_i(y, 0, \lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{118}$$

Dans le cas général, les φ_i ne sont périodiques par rapport à 0 que pour certaines valeurs particulières de $y_1, \ldots, y_{m-1}$, par exemple zéro. Donc, les G_i ne sont pas périodiques par rapport à 0, quand on suppose que les y_j ont des valeurs constantes quelconques. *Le système* (118) *ne rentre pas dans la catégorie du système* (64).

Supposons maintenant que *l'intégrale générale* (116) *admette la période* T. Dans ce cas, le système (118) est de la forme (64), avec cette particularité que *les fonctions principales* f_i *sont nulles*. On y peut prendre $y_i^j(t)=0$ si $j\neq i$ et $y_i^i(t)=1$. On a alors $H_i^j=0$ si $j\neq i$ et $H_i^i(t)=1$. Les fonctions $Z_i(t)$ sont des constantes arbitraires μ_i. Tous les décréments sont égaux à *un*. Les équations (75) deviennent

$$\int_0^T g_k(\mu, t)\,dt=0. \tag{119}$$

La formule (104) devient

$$K_f^2(T)=\int_0^T g_{f2}(\mu, t)\,dt. \tag{120}$$

En portant dans (105), on obtient *l'équation de stabilité*.

Si toutes ses racines sont simples, le domaine de stabilité reste fini quand λ tend vers zéro, comme on l'a vu au n° 23.

On retrouve exactement les résultats de l'étude directe faite dans un des Mémoires précités.

La méthode de variation des constantes que nous venons de signaler constitue une généralisation de la méthode employée dans ma théorie générale de la synchronisation des oscillateurs harmoniques.

49. *Cas* $n=2$. — Supposons les *fonctions principales indépendante de* t. Le système linéaire associé admet pour solutions fondamentales la solution périodique $Z_i'(t)$ et la solution $U_i(t)$ donnée par les formules

$$U_1(t)=Z_1'(t)\int\frac{p_{12}(t)H(t)}{Z_1'^2(t)}\,dt, \qquad U_2(t)=\frac{H(t)+Z_2'(t)U_1(t)}{Z_1'(t)}, \tag{121}$$

$$H(t)=e^{\Delta(t)}, \qquad \Delta(t)\int_0^t[p_{11}(t)+p_{22}(t)]\,dt. \tag{122}$$

L'intégrale générale est

$$x_i(t)=aZ_i'(t)+bU_i(t) \qquad (i=1, 2).$$

Formons l'équation en S. Les équations $x_i(T)=Sx_i(0)$ s'écrivent

$$a(1-S)Z_i'(0)+b[U_i(T)-SU_i(0)]=0.$$

La racine $S=1$ saute aux yeux. L'autre est donnée par

$$Z_1'(0)[U_2(T)-SU_2(0)]-Z_2'(0)[U_1(T)-SU_1(0)]=0,$$

soit

$$S=H(T)=e^{\Delta(T)}. \tag{123}$$

La *condition de stabilité* est donc (¹)

$$\Delta(T) < 0. \tag{124}$$

On a ensuite

$$y_i^1(t) = Z_i'(t), \qquad y_i^2(t) = U_i(t) \qquad (i = 1 \text{ et } 2);$$

en choisissant la constante d'intégration de la première formule (121) de telle manière que l'on ait

$$U_1(t+T) = SU_1(t). \tag{125}$$

L'équation (109) et la formule (107) deviennent

$$\int_0^T [U_2(t)g_1(Z, t-\mu) - U_1(t)g_2(Z, t-\mu)]\, e^{-\Delta t}\, dt = \frac{\Delta T}{\lambda}, \tag{126}$$

$$\sigma = \int_0^T [(U_2 p_{11}' - U_1 p_{21}')\varphi_1 + (U_2 p_{12}' - U_1 p_{22}')\varphi_2 + (U_2 q_{11} - U_1 q_{21})Z_1' + (U_2 q_{12} - U_1 q_{22})Z_2']\, e^{-\Delta t}\, dt, \tag{127}$$

avec

$$\begin{cases} \varphi_i = Z_i' A_1(t) + U_i\left[A_2(t) + \dfrac{S}{1-S} A_2(T)\right], \\ A_1(t) = \displaystyle\int_0^t (U_2 g_1 - U_1 g_2) e^{-\Delta}\, dt, \qquad A_2(t) = \int_0^t (-Z_2' g_1 + Z_1' g_2) e^{-\Delta}\, dt. \end{cases} \tag{128}$$

La *première approximation de la solution périodique* est donnée par (n° 34)

$$x_i(t) = \gamma Z_i'(t) + \varphi_i(t), \tag{129}$$

la constante γ se calculant par l'équation

$$\int_0^T (A x_1^2 + 2B x_1 x_2 + C x_2^2 + 2D x_1 + 2E x_2)\, e^{-\Delta}\, dt = 0,$$

avec

$$A = U_2 p_{111} - U_1 p_{211}, \qquad B = U_2 p_{112} - U_1 p_{212}, \qquad C = U_2 p_{122} - U_1 p_{222},$$
$$D = U_2 q_{11} - U_1 q_{21}, \qquad E = U_2 q_{12} - U_1 q_{22}.$$

Nous savons que le coefficient de γ^2 est nul, il reste, en tenant compte de (127),

$$2\gamma\sigma = -\int_0^T (A\varphi_1^2 + 2B\varphi_1\varphi_2 + C\varphi_2^2 + 2D\varphi_1 + 2E\varphi_2)\, e^{-\Delta}\, dt. \tag{130}$$

(¹) On peut aussi l'obtenir en appliquant la théorie de H. Poincaré à l'équation différentielle

$$f_2\, dx_1 - f_1\, dx_2 = 0.$$

SUR

QUELQUES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES MÊLÉES

PAR M. PAUL MONTEL.

1. Le théorème de Jacobi sur l'impossibilité de l'existence d'une fonction analytique non constante admettant trois périodes indépendantes a été étendu dans différentes directions (1). Les résultats les plus complets ainsi obtenus s'expriment dans les théorèmes suivants :

Toute fonction continue d'une variable réelle x qui vérifie les équations

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_n}[f]=0,$$
$$\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_n}[f]=0,$$

dans lesquelles tous les rapports $\frac{h_i}{k_j}$ sont irrationnels, est un polynome de degré $n-1$ au plus.

Toute fonction analytique d'une variable complexe z qui vérifie les équations

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_n}[f]=0,$$
$$\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_n}[f]=0,$$
$$\Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\dots\Delta_{l_n}[f]=0,$$

dans lesquelles tous les systèmes (h_i, k_j, l_s) de trois accroissements sont indépendants, est un polynome de degré $n-1$ au plus.

La notation $\Delta_h[f(x)]$ ou $\Delta_h[f]$ désigne l'accroissement $f(x+h)-f(x)$ et la notation $\Delta_h\Delta_{h'}[f]$ désigne l'expression

$$\Delta_h[\Delta_{h'}(f)]=\Delta_{h'}[\Delta_h(f)].$$

(1) PAUL MONTEL, *Sur quelques extensions d'un théorème de Jacobi* (*Prace Matematyczno-Fizyczne*, t. XLIV, 1936, p. 315-329); *Sur un système d'équations fonctionnelles* (*Annales de la Société Polonaise de mathématiques*, t. XXI, 1948, p. 99-106).

et de même

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_m}[f]=\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{m-1}}[\Delta_{h_m}(f)];$$

le résultat de l'opération ne dépend d'ailleurs pas de l'ordre dans lequel on place les accroissements.

Lorsque certains des rapports $\frac{h_i}{k_j}$ sont rationnels et certains des systèmes (h_i, k_j, l_s) sont dépendants, il serait intéressant de déterminer la nature des fonctions f qui satisfont aux équations précédentes.

Je me propose maintenant d'examiner le cas des fonctions de plusieurs variables en introduisant les différences de ces fonctions pour des accroissements simultanés donnés aux variables. Nous obtiendrons des résultats semblables aux précédents en ce sens que toutes les solutions sont des polynomes, mais différents en ce que les degrés de ces polynomes peuvent dépasser $n-1$. Les polynomes de degré inférieur ou égal à $n-1$ vérifient toute équation aux différences finies du type précédent. Lorsque le degré dépasse $n-1$, les polynomes doivent satisfaire à des conditions que nous étudierons.

2. Rappelons d'abord certains résultats concernant les corps de périodes constitués à partir de périodes fondamentales.

Soient, dans un plan, trois périodes h, k, l, représentées par trois vecteurs issus d'un point O pris comme origine; le corps de périodes est constitué par l'ensemble des vecteurs $mh+nk+pl$, issus de l'origine, m, n, p désignant des entiers positifs, négatifs ou nuls. Les extrémités de ces vecteurs autres que O, s'appellent les points-périodes. Les différents corps de périodes sont caractérisés par l'existence de périodes infinitésimales, c'est-à-dire de vecteurs périodes dont la longueur est inférieure à tout nombre positif ε arbitrairement petit.

Si, quel que soit ε, il existe deux périodes de grandeurs inférieures à ε et non situées sur la même droite, on peut couvrir le plan par un réseau de parallélogrammes égaux dont les côtés sont égaux à ces deux périodes. Tout point du plan est à une distance inférieure à 2ε d'un point-période; comme ε est arbitraire, tout point du plan est un point d'accumulation de points-périodes. L'ensemble de ces points-périodes est partout dense dans le plan. On dit que les périodes h, k, l sont *indépendantes*.

Si, à partir d'une valeur de ε, toutes les périodes de grandeur inférieure à ε sont portées par la même droite, on voit aussitôt que l'ensemble des points-périodes est partout dense sur un faisceau de droites équidistantes qui peut se réduire à une droite unique. On est dans le premier cas pour $h=1$, $k=\sqrt{2}$, $l=i$ et dans le second, pour $h=1$, $k=\sqrt{2}$, $l=\sqrt{3}$. On dit alors que les périodes sont *semi-dépendantes*.

Enfin, s'il n'y a pas de périodes infinitésimales, les points-périodes sont répartis aux sommets d'un réseau de parallélogrammes. On dit que les périodes sont *dépendantes*.

On peut retrouver autrement ces résultats. Il existe des nombres réels non tous nuls μ, μ', μ'' vérifiant l'égalité

$$\mu h + \mu' k + \mu'' l = 0.$$

Ces nombres sont déterminés à un facteur près sauf dans le cas où les périodes forment trois vecteurs superposés. Ils peuvent être liés par des relations linéaires à coefficients entiers, m, n, p,

$$m\mu + n\mu' + p\mu'' = 0.$$

S'il y a entre μ, μ', μ'' deux telles relations distinctes, ces nombres sont proportionnels à des entiers et les périodes sont dépendantes.

S'il y a une seule relation, on en déduit

$$\mu(ph - ml) + \mu'(pk - nl) = 0.$$

Les périodes $ph - ml$, $pk - nl$, sont sur la même droite (D); le rapport $\frac{\mu'}{\mu}$ est irrationnel, sinon les périodes h, k, l seraient dépendantes et μ, μ', μ'' liés par deux relations linéaires à coefficients entiers. Les points-périodes sont partout denses sur la droite (D), et par suite, sur toute parallèle à (D) menée par un point-période non situé sur (D). Je dis que ces parallèles forment un faisceau de droites équidistantes. Posons

$$ph - ml = p\omega_1, \qquad pk - nl = p\omega_2; \qquad l = p\omega_3;$$

d'où

$$h = \omega_1 + m\omega_3, \qquad k = \omega_2 + n\omega_3, \qquad l = p\omega_3.$$

Donc le corps de périodes déduit de h, k, l appartient au corps déduit de ω_1, ω_2, ω_3. Ces dernières sont semi-dépendantes; il en est donc de même de h, k, l.

Enfin, s'il n'y a entre μ, μ', μ'' aucune relation linéaire à coefficients entiers, les périodes sont indépendantes.

Examinons encore le cas de cinq périodes h, k, l, u, v, représentées par des vecteurs issus de l'origine dans l'espace à quatre dimensions. S'il n'y a pas de période infinitésimale, les cinq périodes sont dépendantes, et les points-périodes forment un réseau de parallélépipèdoïdes dans l'espace à quatre dimensions.

Supposons qu'il existe des périodes infiniment petites : s'il y en a quatre non situées dans une variété linéaire ou hyperplan, l'ensemble des points-périodes est partout dense dans l'espace : les périodes sont indépendantes.

Si, à partir d'une certaine valeur de ε, les périodes sont situées dans un même hyperplan, variété à trois dimensions, les points-périodes sont partout denses sur un système d'hyperplans parallèles et équidistants. Nous dirons que les périodes sont semi-dépendantes d'ordre trois.

Si, à partir d'une certaine valeur de ε, les périodes sont situées dans deux mêmes hyperplans à trois dimensions, c'est-à-dire dans une variété linéaire à deux dimensions, les points-périodes sont partout denses sur un système de variétés linéaires à deux dimensions, de plans parallèles, menés par les sommets d'un réseau de parallélogrammes. Les périodes sont dites semi-dépendantes d'ordre deux.

Si, au-dessous d'une certaine valeur de ε, les périodes infinitésimales sont alignées sur une même variété linéaire à une dimension, sur une même droite, les points-périodes sont partout denses sur un ensemble de droites parallèles menées par les sommets d'un réseau de parallélipipèdes à trois dimensions. Les périodes sont dites semi-dépendantes d'ordre un.

Retrouvons ces résultats par le calcul. On peut toujours trouver cinq nombres réels $\mu, \mu', \mu'', \mu''', \mu''''$ vérifiant l'égalité géométrique

$$\mu h + \mu' k + \mu'' l + \mu''' a + \mu'''' c = 0.$$

S'il existe entre les μ une relation linéaire à coefficients entiers

$$m\mu + n\mu' + p\mu'' + q\mu''' + r\mu'''' = 0,$$

on en déduit

$$\mu(rh - mv) + \mu'(rk - nv) + \mu''(rl - pv) + \mu'''(ru - qv) = 0,$$

et, par un raisonnement semblable à celui du plan, on en conclut que les cinq périodes sont semi-dépendantes d'ordre 3.

De même, s'il y a entre les μ deux ou trois relations linéaires distinctes à coefficients entiers, les périodes sont semi-dépendantes d'ordres deux ou un. S'il y a quatre relations, elles sont dépendantes. S'il y en a aucune, elles sont indépendantes.

Pour donner des exemples de ces différents cas, prenons pour les quatre premières périodes les vecteurs-unités portés par les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, Ot. Si la dernière période a pour composantes 1, 1, 1, $\sqrt{2}$, les périodes sont indépendantes: si ces composantes sont 0, 1, 1, $\sqrt{2}$, elles sont semi-dépendantes d'ordre trois; pour la période 0, 0, 1, $\sqrt{2}$, elles sont semi-dépendantes d'ordre deux; pour la période 0, 0, 0, $\sqrt{2}$, semi-dépendantes d'ordre un; pour la période 1, 1, 1, 1, elles sont dépendantes.

3. Soit $f(x, y)$, une fonction continue de deux variables réelles x, y et h, k, l, trois vecteurs définis dans un système de coordonnées rectangulaires x, y par

$$h = \eta + i\eta', \qquad k = \varkappa + i\varkappa', \qquad l = \lambda + i\lambda'.$$

Posons

$$\Delta_h[f] = f(x + \eta, y + \eta') - f(x, y),$$
$$\Delta_k[f] = f(x + \varkappa, y + \varkappa') - f(x, y),$$
$$\Delta_l[f] = f(x + \lambda, y + \lambda') - f(x, y).$$

Cherchons d'abord quelles sont les fonctions $f(x, y)$ vérifiant le système

$$\Delta_h[f] = 0, \qquad \Delta_k[f] = 0, \qquad \Delta_l[f] = 0.$$

On déduit de ces équations

$$\Delta_{mh+nk+pl}[f] = f(x + m\eta + n\alpha + p\lambda,\ y + m\eta' + n\alpha' + p\lambda') - f(x, y) = 0,$$

m, n, p, étant des entiers. Si les périodes sont indépendantes, on peut choisir m, n, p, de façon que le vecteur $mh + nk + pl$, d'origine O soit aussi voisin qu'on le veut du vecteur $x_0 - x + i(y_0 - y)$; donc, puisque $f(x, y)$ est continue, on a

$$f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

et $f(x, y)$ est une constante.

Si les périodes sont semi-dépendantes, le même raisonnement prouve que $f(x, y)$ est constante sur un faisceau de droites parallèles dont on peut toujours écrire l'équation sous la forme

$$ax + by = q,$$

q désignant un entier; $f(x, y)$ est alors de la forme $\varphi(ax + by)$, $\varphi(t)$ désignant une fonction continue de période *un*.

Enfin, si les périodes sont dépendantes, $f(x, y)$ est une fonction doublement périodique.

Nous nous bornerons dans la suite au cas de périodes indépendantes.

Avec cette hypothèse, considérons encore le système

$$\Delta_h[f] = C', \qquad \Delta_k[f] = C'', \qquad \Delta_l[f] = C''',$$

C', C'', C''' désignant des constantes. Calculons les constantes A et B par les équations

$$A\eta + B\eta' = C',$$
$$A\alpha + B\alpha' = C''$$

et posons

$$g(x, y) = f(x, y) - Ax - By,$$
$$C''' - A\lambda - B\lambda' = \gamma.$$

On a

$$\Delta_{mh+nk+pl}[g] = p\gamma,$$

et, si la période $mh + nk + pl$ est infiniment petite, on voit que $p\gamma$ doit être nul, donc $\gamma = 0$. Alors g est une constante C et

$$f(x, y) = Ax + By + C.$$

Les constantes données doivent vérifier la condition

$$\begin{vmatrix} C' & \eta & \eta' \\ C'' & \alpha & \alpha' \\ C''' & \lambda & \lambda' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C' & \eta & \overline{\eta'} \\ C'' & \alpha & \overline{\alpha'} \\ C''' & \lambda & \overline{\lambda'} \end{vmatrix} = 0,$$

$\bar{u}$ désignant le conjugué de u. Si deux des constantes, C', C'', par exemple, sont nulles, la troisième C''' est nulle et la fonction $f(x, y)$ se réduit à une constante.

On peut traiter le même système par une autre méthode qui nous sera utile. Soit $f_1(x, y) = \Delta_u[f]$, u désignant un vecteur arbitraire; on a évidemment

$$\Delta_h[f_1] = 0, \qquad \Delta_k[f_1] = 0, \qquad \Delta_l[f_1] = 0,$$

donc f_1 est une constante et $\Delta_u^2[f]$ est nul quel que soit u. On sait que $f(x, y)$ est alors un polynome du premier degré.

Plus généralement, si une fonction $f(x, y)$ vérifie, quels que soient les vecteurs u, v, w, ..., l'équation

$$\Delta_u \Delta_v \Delta_w \ldots [f] = 0,$$

cette fonction est un polynome. En effet, en laissant y fixe et supposant u, v, w, ... réels, on en conclut que $f(x, y)$ est un polynome en x, quel que soit y (1). C'est aussi un polynome en y, quel que soit x; c'est donc un polynome en x, y.

4. Considérons maintenant le système d'équations aux différences finies relatives à la fonction $f(x, y)$ continue des variables réelles x, y,

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_n}[f] = 0, \\ \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_n}[f] = 0, \\ \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_n}[f] = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles les périodes h_i, k_j, l_s $(i, j, s = 1, 2, \ldots, n)$ sont indépendantes. Je dis que toute solution de ce système est un polynome.

La proposition a été établie pour $n = 1$. Supposons-la vraie jusqu'à la valeur $n - 1$ et montrons qu'elle est vraie pour la valeur n. Soit

$$\varphi(x, y) = \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-1}}.$$

On a

$$\Delta_{h_n}[\varphi] = \Delta_{k_n}[\varphi] = \Delta_{l_n}[\varphi] = 0,$$

et, comme les périodes h_n, k_n, l_n sont indépendantes, φ est une constante. On a donc

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{l_{n-1}} &= \text{const.}, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{h_n} &= 0, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{k_n} &= 0. \end{aligned}$$

Comme les périodes h_n, k_n, l_{n-1} sont indépendantes, la constante est nulle, et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{l_{n-1}} &= \text{const.}, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{h_n} &= 0, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \ldots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{k_n} &= 0. \end{aligned}$$

(1) Cf. *Sur un système d'équations fonctionnelles, etc.* [p. 337, note (1)].

De la même manière, on voit que la constante est nulle et que

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-1}}\Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\dots\Delta_{l_{n-1}} = \text{const.}$$

En continuant ainsi, on arrive à établir l'égalité

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-1}}\Delta_{l_{n-1}} = \text{const.}$$

On aurait de même

$$\begin{aligned}
&\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\dots\Delta_{l_{n-1}} = 0,\\
&\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\dots\Delta_{l_{n-2}} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{l_1} = \text{const.}
\end{aligned}$$

Groupons les équations

$$\begin{aligned}
&\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{k_{n-1}} = \text{const.},\\
&\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{h_n} = 0,\\
&\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{l_1} = \text{const.}
\end{aligned}$$

En remplaçant f par $f_1 = \Delta_{u_1} f$, u_1 désignant un vecteur arbitraire, on voit que f_1 vérifie les mêmes équations, avec des valeurs nulles pour les constantes. On en déduit

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-3}}\Delta_{k_{n-2}}[f_1] = \text{const.}$$

En recommençant la même suite d'opérations à partir de

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-2}}\Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\dots\Delta_{l_{n-1}}[f_1]$$

et en remplaçant f_1 par $f_2 = \Delta_{u_2}[f_1] = \Delta_{u_2}\Delta_{u_1}[f]$, on obtient finalement

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-3}}[f_2] = \text{const.}$$

On continue ainsi en remplaçant k_{n-3} successivement par $k_{n-4}, \dots, k_2, k_1$ et l'on obtient pour

$$f_{n-1} = \Delta_{u_1}\Delta_{u_2}\dots\Delta_{u_{n-1}}[f],$$

l'équation

$$\Delta_{h_2}\Delta_{h_3}\dots\Delta_{h_{n-1}}[f_{n-1}] = \text{C}.$$

On aurait de même

$$\begin{aligned}
&\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-1}}[f_{n-1}] = \text{C}',\\
&\Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\dots\Delta_{l_{n-1}}[f_{n-1}] = \text{C}''.
\end{aligned}$$

Introduisons $f_n = \Delta_{u_n}[f_{n-1}] = \Delta_{u_1}\Delta_{u_2}\dots\Delta_{u_n}[f]$, les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ étant arbitraires; f_n doit vérifier le système

$$(2)\qquad \begin{cases}
\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_{n-1}}[f_n] = 0,\\
\Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\dots\Delta_{k_{n-1}}[f_n] = 0,\\
\Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\dots\Delta_{l_{n-1}}[f_n] = 0.
\end{cases}$$

Par hypothèse, f_n est un polynome entier; par conséquent une différence de f_n, d'ordre assez élevé, est nulle quels que soient les accroissements; il en est donc de même de f dont f_n est une différence d'ordre n; par conséquent, f est un polynome.

Soient α_n le degré d'une solution du système (1) et α_{n-1}, le degré d'une solution du système (2). On a

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + n$$

de même,

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= \alpha_{n-2} + (n-1), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + 2, \\ \alpha_1 &= 0. \end{aligned}$$

Donc, en ajoutant, $\alpha_n = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

On a ainsi une limitation du degré des solutions de (1). Il est d'autre part évident que tout polynome de degré inférieur à n vérifie toute équation obtenue en égalant à zéro une différence d'ordre n.

La démonstration précédente, qui repose sur un raisonnement par récurrence, fait intervenir, pour passer de $n-1$ à n, l'hypothèse que les périodes h_n, k_i, l_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) sont indépendantes. On voit donc que l'hypothèse que tous les groupes de périodes h_i, k_j, l_s sont indépendants est intégralement utilisée, quand on passe de 1 à n.

On voit d'ailleurs directement que si l'un des groupes h_i, k_j, l_s n'était pas indépendant, le système (1) admettrait des solutions autres que des polynomes. Les accroissements étant permutables, on peut supposer que les périodes non indépendantes soient h_n, k_n, l_n. Il existe alors des fonctions périodiques $f(x, y)$ admettant ces périodes et, puisque

$$\Delta_{h_n} = \Delta_{k_n} = \Delta_{l_n} = 0,$$

ces fonctions vérifient le système (1).

Tout polynome de degré inférieur à n vérifie ce système. Les polynomes de degré égal ou supérieur à n qui en sont des solutions doivent vérifier des conditions que nous allons expliciter.

Nous pourrons d'ailleurs nous borner aux polynomes homogènes. Soit en effet $f(x, y)$, un polynome quelconque de degré m, on peut l'écrire, en groupant les termes homogènes,

$$f(x, y) = \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \dots + \varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) + \varphi_0,$$

les φ désignant des polynomes homogènes,

$$f(\rho x, \rho y) = \rho^m \varphi_m + \rho^{m-1} \varphi_{m-1} + \dots + \rho \varphi_1 + \varphi_0,$$

est une solution, quel que soit ρ. On en déduit aussitôt que φ_m, φ_{m-1}, ... sont des solutions, et réciproquement.

5. Proposons-nous de déterminer la forme des polynomes qui satisfont à une équation

$$\Delta^{(n)}_{(h)}[f] = \Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_n}[f] = 0. \tag{2}$$

D'abord, un polynome arbitraire de degré inférieur ou égal à $n-1$ vérifie l'équation. Soit $P(x, y)$, un polynome de degré $m = n+p$ $(p \geq 0)$, que nous pourrons supposer homogène, satisfaisant à l'équation. Désignons par α_j la pente sur l'axe imaginaire du vecteur $h_j = \eta_j + i\eta'_j$, $\alpha_j = \frac{\eta_j}{\eta'_j}$. Le polynome $P \equiv (x - \alpha_j y)^m$ vérifie l'équation (2). On a, en effet,

$$\begin{aligned}
\Delta_{h_1} P &\equiv (\eta_1 - \alpha_j\eta'_1)P_1,\\
\Delta_{h_1}\Delta_{h_2} P &\equiv (\eta_1 - \alpha_j\eta'_1)(\eta_2 - \alpha_j\eta'_2)P_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\dots\Delta_{h_j} P &\equiv (\eta_1 - \alpha_j\eta'_1)(\eta_2 - \alpha_j\eta'_2)\dots(\eta_j - \alpha_j\eta'_j)P_i \equiv 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le polynome

$$P \equiv a_1(x - \alpha_1 y)^m + a_2(x - \alpha_2 y)^m + \dots + a_n(x - \alpha_n y)^m \tag{3}$$

vérifie, quelles que soient les constantes $a_1, a_2, \dots, a_n$, l'équation (2). Remarquons qu'on peut supposer finis tous les α_j. S'ils ne sont pas distincts, si par exemple, $\alpha_1 = \alpha_2$, on pourra remplacer le second terme par $a_2 y(x - \alpha_1 y)^{m-1}$, comme on le vérifie aisément. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, on pourra remplacer le troisième terme par $a_3 y^2(x - \alpha_1 y)^{m-2}$, etc.

Réciproquement, je dis que tout polynome P, homogène et de degré m, qui vérifie l'équation (2) est de la forme (3), ou de celle qui s'en déduit lorsque les α_j ne sont pas tous différents.

En effet, supposons pour simplifier que les α_j soient différents. Le polynome f peut toujours se mettre sous la forme

$$f \equiv a_1(x - \alpha_1 y)^m + \dots + a_n(x - \alpha_n y)^m + y^n(C^p_m b_0 x^p + C^{p-1}_m b_1 x^{p-1} y + \dots + b_p y^p)$$

En identifiant ce polynome avec

$$f(x, y) \equiv A_0 x^m + C^1_m A_1 x^{m-1} y + \dots + C^q_m A_q x^{m-q} y^q + \dots + A_m y^m,$$

les C^q_m désignant les coefficients du binome, on obtient les équations

$$\left\{\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \dots + a_n &= A_0,\\
a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n &= -A_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
a_1\alpha_1^{n-1} + a_2\alpha_2^{n-1} + \dots + a_n\alpha_n^{n-1} &= (-1)^{n-1}A_{n-1},\\
b_0 + a_1\alpha_1^n + a_2\alpha_2^n + \dots + a_n\alpha_n^n &= (-1)^n A_n,\\
b_1 + a_1\alpha_1^{n+1} + a_2\alpha_2^{n+1} + \dots + a_n\alpha_n^{n+1} &= (-1)^{n+1}A_{n+1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
b_p + a_1\alpha_1^m + a_2\alpha_2^m + \dots + a_n\alpha_n^m &= (-1)^m A_m.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Les n premières déterminent $a_1, a_2, \ldots, a_n$, puisque les α_j sont différents. Les autres donnent $b_0, b_1, \ldots, b_p$.

Par hypothèse, le polynome f vérifie l'équation (2); il en est de même de P, donc aussi de $f - P = Q$,

$$Q \equiv y^n(C_m^p b_0 x^p + C_m^{p-1} b_1 x^{p-1} y + \ldots b_p y^p).$$

Toutes les dérivées de Q vérifient l'équation (2); en particulier, les dérivées d'ordre p

$$\frac{\partial^p Q}{\partial x^p} = C b_0 y^n, \qquad \frac{\partial^p Q}{\partial x^{p-1}\partial y} = C b_1 y^n, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^p Q}{\partial y^p} = C b_p y^n,$$

avec $C = m(m-1)\ldots(m-p+1)$. On en déduit

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_p = 0.$$

Donc : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome de degré m vérifie l'équation fonctionnelle* (2) *est qu'il puisse se mettre sous la forme* (3).

On modifierait aisément cet énoncé pour l'adapter au cas où certains des α_i seraient égaux.

La condition précédente ne fait intervenir que les pentes des vecteurs accroissements; on en conclut que l'on peut prendre arbitrairement les grandeurs de ces vecteurs et supposer en particulier que ce sont des vecteurs unitaires.

6. Rappelons la définition des polynomes apolaires. Soit le polynome $F(x)$ de degré n

$$F(x) \equiv A_0 x^n + C_n^1 A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$$

et le polynome de degré n

$$\Phi(x) \equiv B_0 x^n + C_n^1 B_1 x^{n-1} + \ldots + B_n$$

admettant les zéros distincts $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, on dit que les polynomes $F(x)$ et $\Phi(x)$ sont apolaires lorsque $F(x)$ peut se mettre sous la forme

$$P(x) \equiv a_1(x-\alpha_1)^n + a_2(x-\alpha_2)^n + \ldots + a_n(x-\alpha_n)^n.$$

Comme on peut toujours écrire

$$F(x) \equiv P(x) + b_0$$

et calculer b_0 comme dans le paragraphe précédent, on voit, en multipliant les deux membres des $n+1$ équations d'identification (4) par $B_n, C_n^1 B_{n-1}, \ldots, B_0$ et ajoutant, que l'on obtient

$$b_0 = A_0 B_n - C_n^1 A_1 B_{n-1} + C_n^2 A_2 B_{n-2} - \ldots + (-1)^n A_n B_0 = 0.$$

Cette condition est symétrique par rapport aux coefficients A_i et B_j. O voit donc que l'on peut écrire $\Phi(x)$ sous la forme

$$Q(x) \equiv b_1(x-\beta_1)^n + b_2(x-\beta_2)^n + \ldots + b_n(x-\beta_n)^n,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ désignant les zéros de $F(x)$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$, des constantes.

On démontre que, si les polynomes $F(x)$ et $\Phi(x)$ sont apolaires, tout domaine circulaire contenait les zéros de l'un des polynomes contient un zéro de l'autre (1). Dans le cas de $n=2$, les quatre nombres $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ forment un rapport harmonique.

Considérons maintenant un polynome de degré m

$$F(x) \equiv A_0 x^m + C_m^1 A_1 x^{m-1} + \ldots + A_n.$$

Si m est inférieur à n, on peut toujours le mettre sous la forme

$$F(x) \equiv a_1(x-\alpha_1)^m + a_2(x-\alpha_2)^m + \ldots + a_n(x-\alpha_n)^m, \tag{5}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant les zéros de $\Phi(x)$. Si m est supérieur où égal à n, proposons-nous de trouver les conditions sous lesquelles il peut se mettre sous la forme (5). Les équations d'identification des polynomes $F(x)$ et $P(x)$ sont encore les équations (4), en posant toujours $m = n+p$, $p \geq 0$, dans lesquelles les coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_p$ sont remplacés par zéro. En multipliant successivement par $B_n, C_n^1 B_{n-1}, \ldots, B_0$, les deux membres des $n+1$ premières équations, puis ceux des $n+1$ équations à partir de la seconde, etc., jusqu'aux $n+1$ à partir de la $n^{\text{ième}}$, on remplace les $p+1$ dernières équations par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} A_0 B_n - C_n^1 A_1 \quad B_{n-1} + C_n^2 A_2 \quad B_{n-2} + \ldots + (-1)^n A_n \quad B_0 = 0, \\ A_1 B_n - C_n^1 A_2 \quad B_{n-1} + C_n^2 A_3 \quad B_{n-2} + \ldots + (-1)^n A_{n+1} B_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\

que les $p+1$ dérivées partielles d'ordre p de $f(x, y)$, dans lesquelles on remplace y par 1, soient apolaires avec le polynome $\Phi(x)$.

Il résulte d'une remarque faite plus haut que tout domaine circulaire contenant tous les zéros de $\Phi(x)$ contient un zéro de chacun des $p+1$ polynomes en x déduits des dérivées partielles d'ordre p de $f(x, y)$ en remplaçant y par l'unité.

Pour simplifier l'écriture, nous écrirons $\Phi(x)$ sous la forme

$$\Phi(x) = \mathrm{H} - \mathrm{K}x + \mathrm{L}x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\mathrm{S}x^{n-1} + (-1)^n \mathrm{T}x^n.$$

Les conditions (6) deviennent alors

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}_0\mathrm{H} + \mathrm{A}_1\mathrm{K} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{S} + \mathrm{A}_n\mathrm{T} = 0, \\ \mathrm{A}_1\mathrm{H} + \mathrm{A}_2\mathrm{K} + \ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{S} + \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{T} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{A}_p\mathrm{H} + \mathrm{A}_{p+1}\mathrm{K} + \ldots + \mathrm{A}_{m-1}\mathrm{S} + \mathrm{A}_m\mathrm{T} = 0. \end{cases}$$

7. Cherchons dans quels cas le polynome $f(x, y)$ peut satisfaire à plusieurs équations (2) correspondant à des vecteurs h_i et k_j tels que les directions des premiers ne soient pas identiques à celles des seconds. En d'autres termes les polynomes $\Phi(x)$ relatifs aux h_i et aux k_j n'ont pas les mêmes zéros; les coefficients H, K, ..., S, T de ces polynomes ne sont pas proportionnels.

Considérons les équations (7) comme déterminant les inconnues H, K, ..., S, T au nombre de $n+1$. Si un déterminant d'ordre $n+1$ formé avec le tableau des coefficients A_s est différent de zéro, les équations (7) n'admettent que la solution zéro. Si un déterminant d'ordre n est différent de zéro, le système admet des solutions dont le rapport est constant : il leur correspond un seul polynome $\Phi(x)$. Si tous les déterminants d'ordre n sont nuls, le système admet une infinité de solutions non proportionnelles; il y a plusieurs polynomes $\Phi(x)$. Il en est en particulier ainsi lorsque $p \leq n-2$, c'est-à-dire $m \leq 2(n-1)$.

Examinons le cas où $p > n-2$. Alors le tableau des A_s contient des déterminants d'ordre n qui doivent être nuls. Désignons par r le rang du tableau. Il existe un déterminant d'ordre r au moins extrait du tableau qui est différent de zéro et tous les déterminants d'ordre $r+1$ extraits du tableau sont nuls; on a $r \leq n-1$.

Puisque tous les déterminants d'ordre $r+1$ sont nuls, les coefficients A_0, A_1, ..., A_m sont liés par une relation de récurrence homogène à coefficients constants d'ordre r. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_0 &= \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r, \\ \mathrm{A}_1 &= \mu_1\gamma_1 + \mu_2\gamma_2 + \ldots + \mu_r\gamma_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{A}_m &= \mu_1\gamma_1^m + \mu_2\gamma_2^m + \ldots + \mu_r\gamma_r^m, \end{aligned}$$

en supposant les γ_i tous différents. Aucun des μ_i n'est nul sinon les A_s vérifieraient une relation de récurrence d'ordre inférieur à r, ce qui est impossible puisqu'un déterminant d'ordre r est différent de zéro. En portant ces valeurs des A_s dans les équations (7), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mu_1 \quad \Phi(\gamma_1) + \mu_2 \quad \Phi(\gamma_2) + \ldots + \mu_r \quad \Phi(\gamma_r) = 0,\\
&\mu_1\gamma_1\Phi(\gamma_1) + \mu_2\gamma_2\Phi(\gamma_2) + \ldots + \mu_r\gamma_r\Phi(\gamma_r) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mu_1\gamma_1^p\Phi(\gamma_1) + \mu_2\gamma_2^p\Phi(\gamma_2) + \ldots + \mu_r\gamma_r^p\Phi(\gamma_r) = 0.
\end{aligned}$$

Or, p est supérieur à $n-2$ et r inférieur ou égal à $n-1$, donc $p \geq r$ et le système précédent, dans lequel un déterminant d'ordre r, tiré du tableau des coefficients des inconnues $\Phi(\gamma_i)$ est différent de zéro, entraîne

$$\Phi(\gamma_1) = \Phi(\gamma_2) = \ldots = \Phi(\gamma_r) = 0.$$

Ainsi, tout polynome $\Phi(x)$ admet les zéros $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$. Deux systèmes d'accroissements relatifs à deux polynomes $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ sont représentés par des vecteurs dont r au moins ont la même direction. Il en est de même pour trois systèmes d'accroissements h_i, k_j, l_s. Il y a au moins r groupes h_i, k_j, l_s qui sont semi-dépendants ou dépendants. Donc :

Si une fonction continue $f(x, y)$ vérifie les équations (1) *dans lesquelles les périodes h_i, k_j l_s $(i, j, s = 1, \ldots, n)$ sont indépendantes, cette fonction est un polynome dont le degré ne dépasse pas $2(n-1)$.*

On remarquera que si p est inférieur ou égal à $n-2$, un déterminant d'ordre $p+1$ tiré du tableau des coefficients A_s doit être différent de zéro si $f(x, y)$ doit vérifier deux équations aux différences dont les vecteurs accroissements ont des directions distinctes.

8. Supposons $p \leq n-2$ et que le polynome $f(x, y)$ soit une solution du système (1); $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ désigneront les polynomes dont les zéros représentent les pentes, par rapport à Oy convenablement choisi, des vecteurs h_i, k_j, l_s. Les coefficients A_s sont déterminés par un système de $3(p+1)$ équations obtenues, en remplaçant dans les équations (7), H, K, ..., T successivement par les coefficients $H_1, K_1, \ldots, T_1$; $H_2, K_2, \ldots, T_2$: $H_3, K_3, \ldots T_3$ des polynomes $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$, lorsque le degré m de $f(x, y)$ dépasse $n-1$.

Si

$$3(p+1) \leq m = n + p,$$

ou $p \leq \frac{1}{2}(n-3)$, le système admet des solutions et les coefficients des $\Phi(x)$ ne sont assujettis à aucune condition.

Si $p > \frac{1}{2}(n-3)$, tous les déterminants d'ordre $m+1$ doivent être nuls. Leur nombre est égal à

$$3(p+1) - m = 2p - (n-3) = \delta.$$

Comme $p < n-2$, $p+2 < n$, $2(p+1) < n+p = m$, chaque déterminant est constitué de la manière suivante :

$$\Delta_i = \left|\begin{array}{ccccccccc}
H_1 & K_1 & L_1 & \dots & T_1 & o & o & \dots & o \\
o & H_1 & K_1 & \dots & S_1 & T_1 & o & \dots & o \\
o & o & H_1 & \dots & R_1 & S_1 & T_1 & \dots & o \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
o & o & o & \dots & o & H_1 & K_1 & \dots & T_1 \\
H_2 & K_2 & L_2 & \dots & T_2 & o & o & \dots & o \\
o & H_2 & K_2 & \dots & S_2 & T_2 & o & \dots & o \\
o & o & H_2 & \dots & R_2 & S_2 & T_2 & \dots & o \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & o \\
o & o & o & \dots & o & H_2 & K_2 & \dots & T_2 \\
H_3 & K_3 & L_3 & \dots & T_3 & o & o & \dots & o \\
o & H_3 & K_3 & \dots & S_3 & T_3 & o & \dots & o \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & H_3 & \dots & \dots & S_3 & T_3 & \dots & o
\end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{x}\right\} p+1 \\ \left.\vphantom{x}\right\} p+1 \\ \left.\vphantom{x}\right\} p+2-\delta. \end{array}$$

$p-\delta+1+i$

La dernière est obtenue en plaçant H_3, successivement dans les colonnes $p-\delta+2$, $p-\delta+3$, ..., $p+1$. Dans ce déterminant, multiplions par $-x$, $+x^2$, $-x^3$, ..., $(-x)^m$, les éléments des colonnes de rangs 2, 3, 4, ..., $m+1$, et ajoutons les produits aux éléments de la première colonne. Le nouveau déterminant, égal au premier Δ_i, aura comme éléments de la première colonne

$$\Phi_1(x),\quad x\Phi_1(x),\quad \dots,\quad x^p\Phi_1(x),\quad \Phi_2(x),\quad x\Phi_2(x),\quad \dots,\quad x^p\Phi_2(x),$$
$$\Phi_3(x),\quad x\Phi_3(x),\quad \dots,\quad x^{p-\delta+i-1}\Phi_3(x),\quad x^{p-\delta+i}\Phi_3(x).$$

Développons ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne et ajoutons-le à zéro, nous aurons l'identité

$$\varpi_1^{(i)}\Phi_1 + \varpi_2^{(i)}\Phi_2 + \varpi_3^{(i)}\Phi_3(x) \equiv o \qquad (i = 1, 2, \dots, \delta),$$

$\varpi_1^{(i)}$ et $\varpi_2^{(i)}$ désignant des polynomes de degré p et $\varpi_3^{(i)}$ un polynome de degré $p-\delta+i$. On obtient ainsi δ identités distinctes puisque les degrés des polynomes $\varpi_3^{(i)}$ sont tous différents. En multipliant les deux membres de ces δ identités par des paramètres arbitraires, on a l'identité unique

$$\varpi_1\Phi_1 + \varpi_2\Phi_2 + \varpi_3\Phi_3 \equiv o, \tag{8}$$

ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 désignant des polynomes de degré p contenant δ paramètres indépendants entrant d'une manière linéaire et homogène.

Réciproquement, si les polynomes $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ sont liés par une telle identité (8), les déterminants Δ_i sont nuls et les équations définissant les A_i sont compatibles. Il suffit pour le voir d'écrire l'identité (8) en donnant aux polynomes ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 des coefficients indéterminés. En explicitant l'identité, on obtient $m+1$ équations à $3(p+1)$ inconnues homogènes. Le nombre des paramètres arbitraires est

$$3(p+1)-m-1=\delta-1.$$

Pour qu'il y ait un paramètre arbitraire de plus, il faut et il suffit que les déterminants d'ordre $m+1$ tirés du tableau des inconnues soient nuls : ce sont les déterminants Δ_i.

En résumé :

Pour que le polynome homogène $f(x, y)$, de degré m, vérifie le système (1) *d'équations aux différences mêlées, il faut que son degré ne dépasse pas* $2(n-1)$.

Si $m \leq n-1$, *le polynome* $f(x, y)$ *est arbitraire.*

Si $n-1 < m \leq \frac{3}{2}(n-1)$, *le polynome* $f(x, y)$ *dépend en général de* $3(n-1)-2m$ *paramètres arbitraires linéaires et homogènes.*

Si $\frac{3}{2}(n-1) < m \leq 2(n-1)$, *le polynome n'existe que si les polynomes* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *qui admettent comme zéros les pentes sur l'axe des y des vecteurs accroissements vérifient l'identité*

$$\varpi_1\Phi_1+\varpi_2\Phi_2+\varpi_3\Phi_3\equiv 0,$$

ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, *désignant des polynomes de degré p qui dépendent de* $2m-3(n-1)$ *paramètres linéaires et homogènes. En général, ce polynome est unique.*

9. Supposons maintenant que la fonction $f(x, y)$ soit une fonction analytique des deux variables complexes

$$x=x_1+ix_2, \qquad y=x_3+ix_4.$$

Nous introduirons les accroissements h, k, l, u, v représentés par des vecteurs de l'espace à quatre dimensions; par exemple, le vecteur h se déduira des accroissements

$$\eta=\eta_1+i\eta_2, \qquad \eta'=\eta_3+i\eta_4$$

donnés aux variables x, y ou des accroissements réels γ_{11}, γ_{12}, γ_{13}, γ_{14} donnés aux variables réelles, x_1, x_2, x_3, x_4.

Nous conserverons les définitions et notations du paragraphe 3 et remplacerons le système des équations (1) du paragraphe 4 par le système

$$(9)\qquad \begin{cases} \Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\ldots\Delta_{h_n}[f]=0, \\ \Delta_{k_1}\Delta_{k_2}\ldots\Delta_{k_n}[f]=0, \\ \Delta_{l_1}\Delta_{l_2}\ldots\Delta_{l_n}[f]=0, \\ \Delta_{u_1}\Delta_{u_2}\ldots\Delta_{u_n}[f]=0, \\ \Delta_{v_1}\Delta_{v_2}\ldots\Delta_{v_n}[f]=0 \end{cases}$$

pour lequel les périodes h_i, k_j, l_r, u_s, v_t sont indépendantes ou semi-dépendantes d'ordre 3.

On démontre d'abord qu'une fonction f vérifiant les équations

$$\Delta_h = 0, \quad \Delta_k = 0, \quad \Delta_l = 0, \quad \Delta_u = 0, \quad \Delta_v = 0,$$

est une constante. En effet, si les périodes sont indépendantes, les points-périodes sont partout denses dans l'espace à quatre dimensions et $f(x, y)$ est constante en ces points, donc partout. Si les périodes sont semi-dépendantes d'ordre 3, les points-périodes sont partout denses sur une variété linéaire à trois dimensions. La fonction est aussi constante, car une fonction analytique non constante ne peut prendre la même valeur que sur des variétés à deux dimensions.

On en déduit aussitôt la solution du système

$$\Delta_h = C_1, \quad \Delta_k = C_2, \quad \Delta_l = C_3, \quad \Delta_u = C_4, \quad \Delta_v = C_5.$$

En effet, les dérivées f'_x et f'_y, vérifiant le système écrit plus haut, sont des constantes, donc

$$f(x, y) = Ax + By + C,$$

A, B, C, désignant des constantes. A et B sont nuls, et f est encore une constante, lorsque trois des C_i sont nulles. Supposons en effet

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

On en déduit

$$A\eta_i + B\eta_i' = 0,$$
$$A\alpha + B\alpha' = 0,$$
$$A\lambda + B\lambda' = 0.$$

Alors, $A = B = 0$, sinon on aurait

$$\frac{\eta_i}{\eta_i'} = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

et les périodes seraient semi-dépendantes d'ordre inférieur à 3.

En reprenant le raisonnement du paragraphe 4, on démontrerait la proposition suivante :

Toute solution du système (9) *est un polynome aux variables complexes* x, y.

Il suffit de répéter la suite des opérations du paragraphe 4 ; on peut même simplifier le calcul en remplaçant chacun des accroissements arbitraires Δ_u par une dérivée de $f(x, y)$ par rapport à l'une des variables lorsque les seconds membres des égalités intermédiaires contiennent moins de trois constantes nulles. La condition que tous les systèmes h_i, k_j, l_r, u_s, v_t soient formés de périodes indépendantes ou semi-dépendantes d'ordre 3 est ici aussi indispensable.

10. La plupart des démonstrations employées dans le cas de deux variables réelles peuvent être reprises, *mutatis mutandis*, dans celui de deux variables complexes. On peut ainsi établir que le degré des polynomes solutions ne dépasse pas $2(n-1)$ et que la forme de ces polynomes est la même que dans le domaine réel.

Tout polynome de degré inférieur ou égal à $n-1$ est une solution. Lorsque ce degré m dépasse $n-1$ et demeure inférieur ou égal à $\frac{5}{4}(n-1)$, la solution homogène est donnée par un polynome dépendant de $5(n-1)-4m$ paramètres arbitraires; lorsque ce degré dépasse $\frac{5}{4}(n-1)$, les polynomes $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_5$ qui ont pour zéros, les quotients $\frac{\eta}{\eta'}$ supposés finis doivent vérifier des conditions. Celles-ci peuvent être exprimées de la manière suivante : il existe des polynomes $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_5$, homogènes, de degré $m-n$ et dépendant de $4m-5(n-1)$ paramètres arbitraires qui vérifient l'identité

$$\varpi_1\Phi_1+\varpi_2\Phi_2+\varpi_3\Phi_3+\varpi_4\Phi_4+\varpi_5\Phi_5\equiv 0.$$

Les résultats qui précèdent résolvent entièrement le problème de déterminer les solutions des systèmes d'équations aux différences mêlées (1) ou (9). Il serait intéressant de trouver la solution générale de ces équations lorsque certains des systèmes des accroissements qui y figurent ne sont pas indépendants.